Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Vektorianalyysi II (MAT21020), syksy 2018
Kurssitentti, Ma 17.12.2018
Tentaattori: Ville Tengvall (ville.tengvall@helsinki.fi)

Vastaa kaikkiin kysymyksiin (kokeessa ei saa käyttää laskinta)

1. Tarkastellaan reaaliarvoista funktiota $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 + x_3 - x_1x_3\,.$$

(a) Määritä funktion f gradientti $\nabla f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(b) Määritä funktion f kriittiset pisteet koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$. **(2p)**

(c) Määritä funktion f Hessen matriisi $\mathrm{Hes}_f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^3$. **(1p)**

(d) Määritä kohdassa (b) löytämiesi kriittisten pisteiden laatu. **(2p)**

2. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkoa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1,\, x_3 > 0\}\,.$$

(a) Osoita, että joukko S on avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileä, kaksiulotteinen graafipinta. **(2p)**

(b) Määritä pinnan S tangenttitaso $\mathcal{T}_a$ pisteessä $a = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. **(1.5p)**

(c) Määritä pinnan S normaalisuora $\mathcal{N}_a$ pisteessä $a = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. **(1.5p)**

(d) Hahmottele joukot S, $\mathcal{T}_a$ ja $\mathcal{N}_a$ kuvan avulla. **(1p)**

3. Olkoot

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t-1, t)$$

ja

$$\eta : [0, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad \eta(t) = (t, 1-t^2)$$

polkuja.

(a) Määrittele polkujen γ ja η yhdistetty polku $\gamma \vee \eta$. **(2p)**

(b) Piirrä kuva polun $\gamma \vee \eta$ jäljestä. **(1p)**

(c) Laske funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = |x_1|$$

käyräintegraali polun $\gamma \vee \eta$ suhteen. **(3p)**

4. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} \sin(x+y) + \cos u = 1 \\ \sin(y+u) + \cos v = 1. \end{cases}$$

(a) Osoita, että kyseisellä yhtälöparilla on pisteen $a = (0,0,0,0)$ ympäristössä muotoa

$$(x, y) = g(u, v)$$

oleva jatkuvasti differentioituva ratkaisu. **(4p)**

(b) Määritä (a)-kohdan kuvaukselle g lineaarikuvauksen $Dg(0,0)$ matriisi. **(2p)**