Vektorianalyysi II

Yleistentti (kokeen kesto 3h 30min), 24.05.2017
Taulokkokirjat ja laskimet eivät ole kokeessa sallittuja.

1. Määritä funktion
$$f(x,y) = \frac{1}{2}z + xe^y + ye^x - x - y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
kriittiset pisteet ja niiden laatu.

2. (a) Kerro Implisiittifunktiolauseen väite.
   (b) Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinnan $x^2 + 2xy + y^2 + z^4 = 1$ pisteeseen $(2,-2,1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. (a) Kerro, mitä tarkoittaa jos sanotaan, että kuvaus f on lokaali diffeomorfismi pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Onko kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+z, e^{x+y}, e^{x-z})$, lokaali diffemorfismi pisteessä $(0,0,0)$?

4. Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3)$ ja $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t^3)$. Määritä
$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3$, ja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, 2t^2, t^2)$. Laske integraali
$$\int_\gamma f\, ds.$$