Vektorianalyysi II

Kurssikoe (kokeen kesto 2h 30min), 19.12.2016
Taulokkokirjat ja laskimet eivät ole kokeessa sallittuja.

Kokeessa on **kolme** tehtävää, joista jokaisesta saa maksimissaan 16 pistettä.

1. (a) (6 pistettä) Selitä omin sanoin, miten kolmesti jatkuvasti derivoituvan funktion f toisen kertaluvun Taylor–kehitelmä ja Hessen matriisi $D^2 f = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)_{i,j=1}^n$ liittyvät toisiinsa.

   (b) (10 pistettä) Määritä funktion

$$f(x, y) = e^{x^2 - 4xy + y^2 - 6y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

   kriittiset pisteet ja niiden laatu.

2. (a) (6 pistettä) Kerro Implisiittifunktiolauseen väite.

   (b) (10 pistettä) Määritä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinnan $xe^y + ye^x + e^z = 0$ pisteeseen $(-1, 0, 0)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. (a) (10 pistettä) Olkoon $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ tason vektorikenttä, ja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, positiivisesti suunnistettu yksikköympyrän kehä. Laske integraali

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s}.$$

   (b) (6 pistettä) Kerro luennoilla käsitellyn Greenin kaavan väittämä.