Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Helsingin yliopisto

Kokeessa saa olla mukana vain kynät, kumi ja viivoitin.
Elektroniset laitteet ja taulukkokirja eivät ole sallittuja.

VEKTORIANALYYSI I
21.10.2019

0.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{kun } (x,y) \neq 0\,, \\ 0, & \text{kun } (x,y) = 0\,. \end{cases}$$

Etsi funktion f suuntaisderivaatat origossa $\partial_a f(0,0)$ jokaiseen suuntaan $a = (a_1, a_2)$, kun $||a|| = 1$. Osoita, että f ei ole jatkuva origossa.

0.2. **Tehtävä.** (1) Etsi osittaisderivaatta $\partial f/\partial x$, kun

$$(a) \quad f(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}\,, \qquad (b) \quad f(x,y) = x \sin\left(\frac{x}{1+y^2}\right).$$

(2) Tutki, onko funktiolla

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2$$

lokaaleja ääriarvopisteitä. Jos niitä on, niin etsi lokaalit ääriarvot.

0.3. **Tehtävä.** Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \sin(x_2) + x_3^2, \cos(x_1) + x_3^3, x_1x_2x_3)$$

on differentioituva.
Etsi (vektori)osittaisderivaatta $\partial_1 f$.
Määrää kuvauksen f Jacobin matriisi.

0.4. **Tehtävä.** Olkoon
(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, x_1x_2, x_2)$
(2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, g(x) = ||x||^2$
(3) $h := gf : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,.$

Osoita, että h on differentioituva. Etsi derivaatta $Dh(x_0)$ pisteessä $x_0 = (1, -1)$.