

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Kokeessa saa olla mukana vain kynät, kumi ja viivoitin.
Elektroniset laitteet ja taulukkokirja eivät ole sallittuja.
Tentti-aika on 3 tuntia 30 minuuttia.

VEKTORIANALYYSI I
11.4.2018

0.1. Tehtävä. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, \quad \text{kun } (x_1, x_2) \neq (0, 0),$$
$$f(0, 0) = 0.$$

Etsi funktion f suuntaisderivaatat (eli suunnatut derivaatat) origossa. Osoita, että f ei ole jatkuva origossa.

0.2. Tehtävä. Olkoon $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineaarikuvaus. Osoita, että $\partial_e A(x_0) = Ae$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\|e\| = 1$.

0.3. Tehtävä. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $n \geq 2$. Etsi funktion f osittaisderivaatat pisteessä x ja funktion f gradientti pisteessä x .

Perustele, miksi funktio f on differentioituva. Mikä on funktion f derivaatta pisteessä x ?

0.4. Tehtävä. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Etsi funktion f gradientti. Piirrä tasa-arvokäyrä, joka kulkee origon kautta, ja piirrä gradienttivektori pisteessä $(-1, 1)$.

0.5. Tehtävä. Tutki, onko funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^4 - x_2^4$, lokaaleja ääriarvopisteitä.