MAT21005 Topologia IA
Kurssikoe 5.3.2020
Kesto: 2 t 30 min

Huom.: kurssikokeessa saa olla mukana A4-kokoinen yksipuoleinen käsinkirjoitettu muistilappu!

1. Olkoon $X = (0, \infty)$ ja asetetaan

$$d(s,t) = \left|\frac{1}{s} - \frac{1}{t}\right|, \quad s, t \in (0, \infty).$$

(i) Näytä, että d on metriikka joukossa X.
(ii) Määritä joukon $A = [1, \infty)$ läpimitta $d(A)$ avaruudessa (X, d).

2. (*teoriatehtävä*) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita:
(i) jos V_j on avaruuden X avoin joukko jokaisella $j \in J$, niin yhdiste

$$\bigcup_{j \in J} V_j$$

on avoin joukko,
(ii) jos V_1 ja V_2 ovat avaruuden X avoimia joukkoja, niin leikkaus $V_1 \cap V_2$ on avoin joukko.

3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvia kuvauksia. Määritellään kuvaus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ehdolla

$$h(x, y) = (f(x), g(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Näytä, että h on jatkuva kuvaus tason $\mathbb{R}^2$ euklidisen metriikan $|\cdot|_2$ suhteen.

4. Tarkastellaan euklidista avaruutta $(\mathbf{R}^3, |\cdot|_2)$ ja joukkoa

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y \leq z\}.$$

(i) Näytä, että A on suljettu joukko.
(ii) Tutki, onko piste $(0, 0, 1)$ joukon A sisäpiste.
(iii) Tutki, onko piste $(0, 0, 0)$ joukon A reunapiste.
Perustele tarkasti! Ns. alkukuvaehdosta saattaa olla hyötyä.