

HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Topologia Ia

Kurssikoe 7.3.2019

Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella \mathbb{R}^n tarkoitetaan metristä avaruutta (\mathbb{R}^n, d) , missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

t1. (6p.) Olkoon $t \in]0, 1[$ ja olkoon $\|\cdot\|_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty[$ funktio, joka on määritelty kaavalla

$$\|(x, y)\|_t = t|x| + (1-t)|y|$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $\|\cdot\|_t$ on normi vektoriavaruudessa \mathbb{R}^2 .

t2. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 < 2, -1 < x < 1\}$. Osoita, että A on euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 avoin joukko.

t3. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$. Määritä joukon A sulkeuma \bar{A} euklidisessa avaruudessa \mathbb{R}^2 . Perustele vastauksesi.

t4. (6p.) Olkoon $\text{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on rajoitettu}\}$. Pidetään tunnettuna, että $\text{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$ on vektoriavaruus ja että funktio $\|\cdot\|: \text{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty[$, joka on määritelty kaavalla $\|f\| = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$ kaikilla $f \in \text{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$, on normi vektoriavaruudessa $\text{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$. Olkoon d normin $\|\cdot\|$ määräämä metriikka avaruudessa $\text{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$. Osoita, että funktio $\Phi: \text{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla

$$\Phi(f) = \inf_{x \in [-1, 1]} f(x)$$

kaikilla $f \in \text{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$, on jatkuva metrisestä avaruudesta $(\text{raj}([-1, 1], \mathbb{R}), d)$ euklidiseen avaruuteen \mathbb{R} .