MAT21005 Topologi IA
Kursprov 26.10.2018
Tid: 2 t 30 min

1.(i) Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Definiera begreppen *öppen* mängd $A \subset X$ och *sluten* mängd $B \subset X$.
(ii) Motivera på basen av definitionen varför mängden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

är varken öppen eller sluten i $\mathbb{R}^2$ försedd med det euklidiska avståndet.

2. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Visa att d' är en metrik i X, då

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Tips: kunskapen att funktionen $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ är växande i $[0, \infty)$ kan vara nyttig.

3. Visa att mängden

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

är öppen i $\mathbb{R}^3$ försedd med det euklidiska avståndet.

4. Låt $f : X \to Y$ vara en avbildning, där X och Y är metriska rum. Visa att f är kontinuerlig $X \to Y$ om och endast om följande villkor gäller: det slutna höljet

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

för varje mängd $B \subset Y$. *Tips:* urbildskriteriet för kontinuitet med slutna mängder kan användas.

KÄÄNNÄ!

MAT21005 Topologi IA
Kurssikoe 26.10.2018
Kesto: 2 t 30 min

1.(i) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määrittele käsitteet *avoin* joukko $A \subset X$ ja *suljettu* joukko $B \subset X$.
(ii) Perustele määritelmän nojalla miksi joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ varustettuna euklidisella metriikalla.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Näytä, että d' on metriikka avaruudessa X, kun

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Vihje: tieto, että funktio $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ on kasvava joukossa $[0, \infty)$ saattaa olla hyödyllinen.

3. Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ varustettuna euklidisella metriikalla.

4. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Näytä, että f on jatkuva $X \to Y$ jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa: sulkeuma

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

jokaiselle joukolle $B \subset Y$. *Vihje:* jatkuvuuden alkukuvaehto suljettujen joukkojen avulla on hyödyllinen.

VÄND!

MAT21005 Topologi IA
Kursprov 26.10.2018
Tid: 2 t 30 min

1.(i) Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Definiera begreppen *öppen* mängd $A \subset X$ och *sluten* mängd $B \subset X$.
(ii) Motivera på basen av definitionen varför mängden

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

är varken öppen eller sluten i $\mathbb{R}^2$ försedd med det euklidiska avståndet.

2. Låt (X, d) vara ett metriskt rum. Visa att d' är en metrik i X, då

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Tips: kunskapen att funktionen $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ är växande i $[0, \infty)$ kan vara nyttig.

3. Visa att mängden

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

är öppen i $\mathbb{R}^3$ försedd med det euklidiska avståndet.

4. Låt $f : X \to Y$ vara en avbildning, där X och Y är metriska rum. Visa att f är kontinuerlig $X \to Y$ om och endast om följande villkor gäller: det slutna höljet

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

för varje mängd $B \subset Y$. *Tips:* urbildskriteriet för kontinuitet med slutna mängder kan användas.

KÄÄNNÄ!

MAT21005 Topologi IA
Kurssikoe 26.10.2018
Kesto: 2 t 30 min

1.(i) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määrittele käsitteet *avoin* joukko $A \subset X$ ja *suljettu* joukko $B \subset X$.
(ii) Perustele määritelmän nojalla miksi joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ varustettuna euklidisella metriikalla.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Näytä, että d' on metriikka avaruudessa X, kun

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Vihje: tieto, että funktio $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ on kasvava joukossa $[0, \infty)$ saattaa olla hyödyllinen.

3. Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z\}$$

on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ varustettuna euklidisella metriikalla.

4. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat metrisiä avaruuksia. Näytä, että f on jatkuva $X \to Y$ jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa: sulkeuma

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$$

jokaiselle joukolle $B \subset Y$. *Vihje:* jatkuvuuden alkukuvaehto suljettujen joukkojen avulla on hyödyllinen.

VÄND!