INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Topologi 1, 2015
Kursprov I
3.3.2015

1. Antag, att (X, d) är ett metriskt rum. Antag, att punkterna a och b satisfierar villkoret $d(a, b) < 3$. Vi betecknar $r = 3 - d(a, b)$. Antag, att punkten x satisfierar villkoret $d(x, b) < r$. Visa, att $d(a, x) < 3$.

2. Antag, att (X, d) och (Y, d') är metriska rum och att mängderna X och Y är icke-tomma. Antag, att d är $\{0, 1\}$-metriken. Antag, att $f: X \to Y$ är en funktion och $a \in X$. Visa, att funktionen f är kontinuerlig i punkten a.

3. Antag, att mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$ är utrustad med den vanliga metriken $(d(x, y) = |x - y|)$. Visa, att mängden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{sinx} > 1 + sin(e^x)\}$$

är öppen.

4. Antag, att mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$ är utrustad med den vanliga metrikan $(d(x, y) = |x - y|)$. Bestäm det slutna höljet till mängden

$$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I, 2015
Kurssikoe 1
3.3.2015

1. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus. Oletetaan, että pisteet a ja b toteuttavat ehdon $d(a, b) < 3$. Merkitään $r = 3 - d(a, b)$. Oletetaan, että piste x toteuttaa ehdon $d(x, b) < r$. Osoita, että $d(a, x) < 3$.

2. Oletetaan, että (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia ja että joukot X ja Y ovat epätyhjiä. Oletetaan, että d on $\{0, 1\}$-metriikka. Oletetaan, että $f: X \to Y$ on funktio ja $a \in X$. Osoita, että funktio f on jatkuva kohdassa a.

3. Oletetaan, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on varustettu tavallisella metriikalla $(d(x, y) = |x - y|)$. Osoita, että joukko

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{sinx} > 1 + sin(e^x)\}$$

on avoin.

4. Oletetaan, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on varustettu tavallisella metriikalla $(d(x, y) = |x - y|)$. Määritä joukon

$$A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

sulkeuma.