INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Topologi I, 2015

Delprov 2, 5.5.2015

Uppgifterna är ordnade enligt ämne. Man får ha med sig en handskriven "lunt-lapp"(Två handskrivna A4-papper).

1. Anta att $X = \mathbb{R}^2$ utrustad med den vanliga metriken. Bestäm inner-, ytter- och randpunkterna till mängden

$$A = \{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 + x_2 < 7\}.$$

Motivera kort dina svar.

2. Anta att $X = \mathbb{R}^2$ utrustad med den vanliga metriken. Vi betraktar följden (z_n), där

$$z_n = \left(7 + \frac{1}{n^2}, 42 + \frac{1}{n}\right)$$

för varje $n = 1, 2, \ldots$. Visa att följden (z_n) konvergerar och bestäm dess gränsvärde.

3. Gör antingen uppgift (a) eller (b) (men inte båda).

(a) Vi betraktar ett metriskt rum (X, d) där $d(x, y) \leq 7$ för alla $x, y \in X$. Anta att funktionen $f : X \to X$ satisfierar villkoret $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$, för något $q \in [0, 1[$. Anta att $a \in X$ är en fixpunkt till funktionen f, dvs. $f(a) = a$. Anta att $x_0 \in X$ och betrakta följden (x_n), där $x_{n+1} = f(x_n)$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Visa att $d(x_{n+1}, a) \leq 7q^{n+1}$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Anta att $X = \mathbb{R}$ utrustad med den vanliga metriken. Vi betraktar följden (f_n) där funktionen $f_n : X \to X$ är definierad för alla $n = 1, 2, \ldots$ genom

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n(7 + x^2)}.$$

(i) Konvergerar följden (f_n) punktvis?

(ii) Konvergerar följden (f_n) likformigt?

4. Gör antingen uppgift (a) eller (b) (men inte båda).

(a) Anta att (X, d) är ett metriskt rum och $X = \{x_1, \ldots, x_{42}\}$. Visa att rummet (X, d) är fullständigt och kompakt.

(b) Anta att $X = \mathbb{R}^2$ utrustad med den vanliga metriken. Låt

$$A = \{(x_1, x_2) \in X \mid |x_2| \leq (x_1)^2\}.$$

Är A sammanhängande? Detaljerad motivering!