HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
MAT12003 Todennäköisyyslaskenta I
Kurssikoe 2 h 30 min
8.3.2018 klo 12:00–14:30

Kokeessa saa käyttää laskinta, mutta ei muita apuvälineitä (esimerkiksi taulukkokirjan käyttö on kielletty).

1. Luvuista $1, 2, 3, 4, 5$ valitaan umpimähkään yksi. Olkoon valittu luku n. Tämän jälkeen luvuista $1, \ldots, n$ valitaan umpimähkään yksi.
   (a) Mikä on todennäköisyys, että jälkimmäisenä valittu luku on 2?
   (b) Mikä on ehdollinen todennäköisyys, että ensin valittu luku oli 2, kun jälkimmäisenä valittu luku on 2?

2. Oletetaan, että todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tapahtumat A, B ja C ovat riippumattomia ja niiden kaikkien todennäköisyys on positiivinen (erityisesti siis $\neq 0$).
   (a) Osoita, että $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Osoita, että tapahtumat A ja $B \cap C$ ovat riippumattomia.

3. Naulatehtaan pakkauskone täyttää laatikon yksitellen nauloilla. Naulojen painot X_i ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $EX_i = 25$ ja $DX_i = 1$, missä yksikkönä on gramma (g). Heti kun naulojen yhteispaino ylittää 10 kg, laatikon täyttö lopetetaan. Laske normaaliapproksimaation avulla todennäköisyys, että täytetyssä laatikossa on korkeintaan 398 naulaa.

4. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille $X_i \sim \mathrm{Geom}(p)$, $i = 1, 2$.
   (a) Johda satunnaismuuttujan $Y = \min\{X_1, X_2\}$ jakauma $Y \sim \mathrm{Geom}(1 - q^2)$, missä $q = 1 - p$.
   (b) Määritä EY ja D^2Y $(= \mathrm{Var}(Y))$.
   Muistutus: Jos $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, niin sen kertymäfunktiolle on voimassa $F_X(k) = 1 - q^{k+1}$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$, missä $q = 1 - p$.

Tehtäväpaperin kääntöpuolella on taulukko standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoista sekä lista tärkeimpien jakaumien pistetodennäköisyys- ja tiheysfunktioista sekä odotusarvoista ja variansseista. ↻

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0.698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0.729069	0.732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0.761148	0.764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0.791030	0.793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0.818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0.946301	0.947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0.956367	0.957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0.965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0.978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0.982571	0.982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987454	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990862	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0.997523	0.997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0.998193	0.998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

Jakaumien pistetodennäköisyys- ja tiheysfunktioita sekä odotusarvoja ja variansseja

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \implies P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k},\ k = 0, 1;$$
$$EX = p \text{ ja } D^2X = p(1-p).$$

$$X \sim \text{Bin}(n,p) \implies P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$
$$EX = np \text{ ja } D^2X = np(1-p).$$

$$X \sim \text{Hyperg}(N,K,n) \implies P(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$
$$EX = n\frac{K}{N} \text{ ja } D^2X = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \implies P(X=k) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$EX = \frac{1-p}{p} \text{ ja } D^2X = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \implies P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ EX = \lambda \text{ ja } D^2X = \lambda.$$

$$X \sim \text{Tas}(a,b) \implies f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & \text{muulloin}; \end{cases} \quad EX = \frac{a+b}{2} \text{ ja } D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \implies f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{muulloin}; \end{cases} \quad EX = \frac{1}{\lambda} \text{ ja } D^2X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x \in \mathbb{R};\ EX = \mu \text{ ja } D^2X = \sigma^2.$$