

Matemaattisten tieteiden kandiohjelma /  
MTO

Tilastollinen päättely IIa

Kurssikoe 18.12.2019 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Olkoon  $\theta > 0$  positiivinen parametri, ja asetetaan

$$f(y; \theta) = \begin{cases} 3\theta^{-1}(y-1)^2 \exp(-(y-1)^3/\theta), & \text{kun } y > 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan, että  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat riippumattomia ja noudattavat kukin yllä mainittua jakaumaa. Olkoon  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  annettu aineisto,  $y_i > 1$  kaikilla  $i$ . Muodosta tämän mallin uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio sekä määritä suurimman uskottavuuden estimaatti  $\hat{\theta}$ . Mikä on parametrin  $\lambda = \theta^3 + 2\theta$  suurimman uskottavuuden estimaatti?

2. Olkoon  $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\lambda)$  riippumattomia, missä  $\lambda > 0$  ja olkoon  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  annettu aineisto,  $y_i > 0$  kaikilla  $i$ . Laske mallin aineistosta havaittu informaatio  $j(\lambda; \mathbf{y})$  sekä mallin Fisherin informaatio  $i(\lambda)$  parametrille  $\lambda$ .
3. Olkoon  $Y_1, \dots, Y_n \sim G(2, 2/\mu)$  riippumattomia, gammajakautuneita satunnaismuuttujia, missä  $\mu > 0$  ja olkoon  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  annettu aineisto,  $y_i > 0$  kaikilla  $i$ . Näytä, että estimaattori  $\bar{Y} = n^{-1}(Y_1 + \dots + Y_n)$  on parametrin  $g(\mu) = \mu$  harhaton, tarkentuva ja täystehokas estimaattori.
4. Olkoon  $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_0, \sigma^2)$  riippumattomia satunnaismuuttujia, joista  $\mu_0$  tunnetaan, mutta  $\sigma^2 > 0$  on tuntematon parametri. Johda suurimman uskottavuuden estimaattori  $\hat{\sigma}^2$ . Laske mallin Fisherin informaatio  $i(\sigma^2)$  varianssiparametrille  $\sigma^2$ . Vastaa lisäksi perustellen kysymyksiin: a) Onko  $\hat{\sigma}^2$  harhaton estimaattori? b) Millaista jakaumaa  $\hat{\sigma}^2$  noudattaa asympotoottisesti? c) Onko  $\hat{\sigma}^2$  tarkentuva estimaattori?

18

### Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja  $X \sim G(\kappa, \lambda)$  noudattaa gammajakaumaa parametreilla  $\kappa > 0, \lambda > 0$ . Sen tiheysfunktio on

$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{x > 0\},$$

odotusarvo  $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$  ja varianssi  $\text{var } X = \kappa/\lambda^2$ . Riippumattomien gammajakautuneitten  $X_i \sim G(\kappa_i, \lambda)$  summa on gammajakautunut  $X_1 + \dots + X_n \sim G(\sum \kappa_i, \lambda)$ . Jos  $X \sim G(\kappa, \lambda)$  ja  $c > 0$  vakio, niin  $cX \sim G(\kappa, \lambda/c)$ .

- Satunnaismuuttuja  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla  $\lambda > 0$ . Tämä on gammajakauman erikoistapaus  $\text{Exp}(\lambda) = G(1, \lambda)$ , ja sen tiheysfunktio on

$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{y > 0\},$$

odotusarvo  $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$  ja varianssi  $\text{var } Y = 1/\lambda^2$ . Eksponenttijakauman kertymäfunktio  $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y}) \mathbf{1}\{y > 0\}$ .

- Satunnaismuuttuja  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$  noudattaa normaalijakaumaa parametreilla  $\mu$  ja  $\sigma^2 > 0$ . Sen tiheysfunktio on siten

$$f_Z(z; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

odotusarvo  $\mathbb{E}Z = \mu$  ja varianssi  $\text{var } Z = \sigma^2$ .

- Satunnaismuuttuja  $W \sim \text{Tas}(a, b)$  noudattaa tasajakaumaa välillä  $(a, b)$ , missä  $b > a$ . Sen tiheysfunktio on

$$f_W(w; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } a < w < b \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Odotusarvo  $\mathbb{E}W = \frac{1}{2}(a + b)$  ja varianssi  $\text{var } W = \frac{1}{12}(b - a)^2$ .

- Diskreetti satunnaismuuttuja  $W \sim P(\mu)$  noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla  $\mu$ . Sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_W(w; \mu) = \begin{cases} e^{-\mu} \mu^w / w!, & \text{kun } w = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Odotusarvo  $\mathbb{E}W = \mu$  ja varianssi  $\text{var } W = \mu$ . Riippumattomien Poisson-jakautuneitten satunnaismuuttujien  $X_i \sim P(\mu_i)$  summa on Poisson-jakautunut  $X_1 + \dots + X_n \sim P(\sum \mu_i)$ .