HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI
Institutionen för matematik och statistik
Serier
Kursprov 11.5.2017

1. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$ konvergerar.

2. Bestäm potensseriens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\ln(k+2)}$ konvergensradie och -intervall.

3. Bestäm ett närmevärde till talet $\sqrt[4]{e} = e^{1/4}$, vars fel är mindre än 0,0001. Använd funktionens $f(x) = e^x$ Taylor polynom $T_n(x; 0)$ och Lagranges form av resttermen genom att först söka ett tillräckligt stort $n \in \mathbb{N}_1$.

4. Låt (a_{k_j}) vara en delföljd till följden (a_k).
   (a) Visa att om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar absolut, så konvergerar också serien $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ absolut.
   (b) Visa att från den absoluta konvergensen av serien $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ inte nödvändigtvis följer att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar absolut. Det omvända resultatet till resultatet i del (a) gäller alltså inte.

Obs! Ett svar som har erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Sarjat

Kurssikoe 11.5.2017

1. Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$.

2. Määritä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\ln(k+2)}$ suppenemissäde ja -väli.

3. Määritä luvun $\sqrt[4]{e} = e^{1/4}$ likiarvo, jonka virhe on pienempi kuin 0,0001. Käytä funktion $f(x) = e^x$ Taylorin polynomia $T_n(x; 0)$ ja Lagrangen jäännöstermimuotoa etsimällä ensin riittävän suuri $n \in \mathbb{N}_1$.

4. Olkoon (a_{k_j}) jonon (a_k) osajono.
   (a) Osoita, että jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti, niin sarja $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ suppenee itseisesti.
   (b) Osoita, että sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$ itseisestä suppenemisesta ei välttämättä seuraa sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ itseinen suppeneminen. Kohdan (a) tulokselle käänteinen tulos ei siis päde.

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.