

Institutionen för matematik och statistik
Sannolikhetslära II
2. mellanförhöret 18.12.2015

Tillåtliga hjälpmedel: normala skrivverktyg, en räknare, en handskrivna A4-fusklapp och en MAOL tabellbok.

1. Den simultana täthetsfunktionen av de stokastiska variablerna X och Y är

$$f_{X,Y}(x,y) = c(3 + x^2y) \mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

- a) Beräkna det värdet av konstant c . (2p)
b) Beräkna ett betingat väntevärde $\mathbb{E}(Y | X = x)$, när $0 < x < 1$. (4p)

2. Låt X och Y vara stokastiska variabler med den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2}{8y^2} \mathbf{1}\{0 < x < 2, y > \frac{1}{4}x^2\}$$

Definera stokastiska variabler

$$U = \frac{X}{2}, \quad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$

Beräkna den simultana täthetsfunktionen av U och V (4p) och ge motiverade svar på följande frågor (vink. minst ett svar är positivt)

- a) Har (U, V) en tvådimensionell likformig fördelningen (tasajakauma tasoalueessa)?
b) Är U och V oberoende?

3. Den simultana fördelningen av X , Y och W är determinerad med den följande hierarkisk modell

$$\begin{cases} X | Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ W \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

- a) Läs från modellet vad är den betingade täthetsfunktionen (ehdollinen tiheysfunktio) $f_{X|Y}$ och läs från modellet det betingade vänteverdet $\mathbb{E}(X | Y)$. (2p)
b) Beräkna $\mathbb{E}X$. (2p)
c) Beräkna $\text{var } X$. (2p)

4. Låt $X = (X_1, X_2)$ och $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ vara stokastiska vektorer som är oberoende och har standardiserad multivariat normalfördelning. Låt $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.

- a) Bestäm den fördelningen av stokastiska vektoren Z . (4 p)
b) Motivera varför de stokastiska variablerna Z_1^2 och $\exp(Z_2 - 3)$ är oberoende? (2 p)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II
2. kurssikoe 18.12.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu ja MAOL taulukkokirjaa

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = c(3 + x^2y) \mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

- a) Laske vakion c arvo. (2p)
b) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(Y | X = x)$, kun $0 < x < 1$. (4p)
2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2}{8y^2} \mathbf{1}\{0 < x < 2, y > \frac{1}{4}x^2\}$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \frac{X}{2}, \quad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio (4p) ja vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin (vihje: ainakin toinen vastauksista on kyllä):

- a) Noudattaako (U, V) tasajakaumaa jossakin tasoalueessa?
b) Ovatko U ja V riippumattomia?
3. Olkoon X, Y ja W satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

$$\begin{cases} X | Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ W \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

- a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$ ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X | Y)$. (2p)
b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)
c) Laske $\text{var } X$. (2p)
4. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ ja $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.
- a) Määrää satunnaisvektorin Z jakauma. (4 p)
b) Selitä miksi satunnaismuuttujat Z_1^2 ja $\exp(Z_2 - 3)$ ovat riippumattomia. (2 p)