

Institutionen för matematik och statistik

Sannolikhetslära II

1. mellanförhöret 23.10.2015

Tillåtliga hjälpmedel: normala skrivverktyg, en räknare och en handskriven A4-fusklapp. Ingen tabellbok.

1. Vi kastar en sexsidig tärning fem gånger. Låt X vara det antalet av dessa gånger när vi får en siffra 5 eller 6.

- (a) Nämna den fördelningen av den stokastiska variabeln X och ge det väntevärdet av X .
- (b) Vad är sannolikheten att $X = 3$ givet att vi fått 5 med det första kastet?

2. Låt $Y \sim U(0, 1)$ och definiera $X = Y^3$.

- (a) Bestäm den kumulativa fördelningsfunktionen F_X av den stokastiska variabeln X .
- (b) Bestäm den täthetsfunktionen f_X av den stokastiska variabeln X .
- (c) Beräkna $\mathbb{E}X$ och $\text{var } X$.

3. En stokastisk variabel X har en likformig fördelning på intervallet $(0, 2)$. En stokastisk variabel Y har en exponentialfördelning med väntevärdet 2. De stokastiska variablerna X och Y är oberoende.

- (a) Beräkna $\mathbb{E}(X - 3Y)$.
- (b) Beräkna $\text{var}(X + Y)$.
- (c) Beräkna $\text{cov}(X, X + XY)$.

4. (a) Den momentgenererande funktionen av X är

$$M(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$$

Bestäm $\mathbb{E}X$ och $\mathbb{E}(X^2)$.

- (b) Anta att $Z \sim \text{Gam}(3, 2)$ och $Y \sim \text{Gam}(5, 2)$ samt Z och Y är oberoende. Bestäm den momentgenererande funktionen och den fördelningen av $Z + Y$. Den momentgenererande funktionen av gammafördelningen $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ är

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha, \quad (t < \lambda).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Todennäköisyyslaskenta II

1. kurssikoe 23.10.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu. Ei taulukkokirjaa

1. Tavallista kuusisivuista noppaa heitetään viisi kertaa. Olkoon X niiden heittojen lukumäärä, joilla saadaan silmäluku 5 tai 6.

- (a) Ilmoita satunnaismuuttujan X jakauma sekä kerro sen odotusarvo.
- (b) Millä todennäköisyydellä $X = 3$ ehdolla, että ensimmäisellä heitolla saadaan 5?

2. Olkoon $Y \sim U(0, 1)$ ja määritellään $X = Y^3$.

- (a) Määrää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F_X .
- (b) Määrää satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f_X .
- (c) Laske $\mathbb{E}X$ ja $\text{var } X$.

3. Satunnaismuuttuja X noudattaa takajakaumaa välillä $(0, 2)$. Satunnaismuuttuja Y on eksponenttijakautunut odotusarvolla 2. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

- (a) Laske $\mathbb{E}(X - 3Y)$
- (b) Laske $\text{var}(X + Y)$
- (c) Laske $\text{cov}(X, X + XY)$

4. (a) Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$$

Määrää $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}(X^2)$.

- (b) Oletetaan, että $Z \sim \text{Gam}(3, 2)$ ja $Y \sim \text{Gam}(5, 2)$ sekä Z ja Y ovat riippumattomia. Määrää satunnaismuuttujan $Z + Y$ momenttiemäfunktio ja jakauma. Gammajakauman $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, \quad (t < \lambda).$$