HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Avdelningen för matematik och statistik
MAT12003 Sannolikhetskalkyl I
Kursprov 2 h 30 min
8.3.2018 kl. 12:00–14:30

I kursprovet får man använda en räkneapparat, men inga andra hjälpmedel (det är exempelvis inte tillåtet att använda en tabellsamling).

1. Man väljer slumpmässigt ett tal från talen $1, 2, 3, 4, 5$. Låt det valda talet vara n. Därefter väljer man slumpmässigt ett tal från talen $1, \dots, n$.
   (a) Vilken är sannolikheten att det senare valda talet är 2?
   (b) Vilken är den betingade sannolikheten att det först valda talet var 2, då det senare valda talet är 2?

2. Man antar att A, B och C är oberoende händelser i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ och att deras sannolikheter är alla positiva (speciellt alltså $\neq 0$).
   (a) Visa att $B \cap C \neq \emptyset$.
   (b) Visa att händelserna A och $B \cap C$ är oberoende.

3. Förpackningsmaskinen i en spikfabrik fyller en låda med spikar en i gången. Spikarnas vikter X_i är oberoende slumpvariabler, för vilka $EX_i = 25$ och $DX_i = 1$, där måttenheten är gram (g). Påfyllningen av spikar i en låda upphör genast då spikarnas totala vikt överskrider 10 kg. Beräkna med hjälp av normalapproximationen sannolikheten att det finns högst 398 spikar i en påfylld låda.

4. Låt X_1 och X_2 vara oberoende slumpvariabler, för vilka $X_i \sim \mathrm{Geom}(p)$, $i = 1, 2$.
   (a) Härled slumpvariabelns $Y = \min\{X_1, X_2\}$ fördelningsfunktion $Y \sim \mathrm{Geom}(1 - q^2)$, där $q = 1 - p$.
   (b) Bestäm EY och D^2Y $(= \mathrm{Var}(Y))$.
   Påminnelse: Om $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, så gäller för dess fördelningsfunktion att $F_X(k) = 1 - q^{k+1}$ för alla $k = 0, 1, 2, \dots$, där $q = 1 - p$.

På omstående sida av uppgiftspappret finns en tabell med värden av fördelningsfunktionen för standardnormalfördelningen samt en lista över de viktigaste fördelningarnas frekvens- och täthetsfunktioner samt väntevärdet och variansen. ↺

Fördelningsfunktionens värden för standardnormalfördelningen Φ; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0.503989	0.507978	0,511966	0,515953	0,519938	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563560	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0.621720	0,625616	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,702944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0.886861	0.888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0.904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0.920730	0.922196	0,923642	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931889
1,5	0,933193	0.934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950528	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955434	0.956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976704
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987454	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990862	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0.992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0.995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0.998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

Fördelningars frekvens- och täthetsfunktioner samt väntevärdet och variansen

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \implies P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k},\ k = 0, 1;$$

$$EX = p \text{ och } D^2X = p(1-p).$$

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \implies P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$EX = np \text{ och } D^2X = np(1-p).$$

$$X \sim \text{Hyperg}(N, K, n) \implies P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$EX = n\frac{K}{N} \text{ och } D^2X = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}.$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \implies P(X = k) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$EX = \frac{1-p}{p} \text{ och } D^2X = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \implies P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots;\ EX = \lambda \text{ och } D^2X = \lambda.$$

$$X \sim \text{Tas}(a, b) \implies f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & \text{annars}; \end{cases} \quad EX = \frac{a+b}{2} \text{ och } D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \implies f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{annars}; \end{cases} \quad EX = \frac{1}{\lambda} \text{ och } D^2X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x \in \mathbb{R};\ EX = \mu \text{ och } D^2X = \sigma^2.$$