Reaalianalyysi I / Hytönen
Erilliskoe 3 h 30 min — 18.5.2016

Ratkaise vapaavalintaiset neljä (4) tehtävää seuraavista. Varoitus: Jos palautat liian monta ratkaisua, tarkastaja jättää mielivaltaisesti jonkin ylimääräisen niistä kokonaan arvostelematta – ei välttämättä heikointa!

1. Olkoon $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borelin σ-algebra, ja $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ kaikkien mitallisten joukkojen σ-algebra. Perustele, että $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^2 \neq \operatorname{Leb}\mathbb{R}^2$. Saat käyttää muita kurssilla todistettuja tuloksia ilman todistusta.

2. Olkoon $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, ja merkitään $\tau_h f(x) := f(x+h)$, kun $x, h \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
Saat vedota haluamaasi tiheystulokseen, kunhan mainitset sen täsmällisesti.

3. Joukkoa $E \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan *huokoiseksi*, jos on olemassa sellainen vakio $\alpha > 0$, että jokainen kuula $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ (missä siis $x \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$ ovat mielivaltaisia) sisältää pienemmän kuulan $B(y, \alpha r) \subset B(x, r) \setminus E$.

   Osoita, että mitallisen ja huokoisen joukon mitta on nolla. (Mieti tiheyspisteitä.)

4. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva funktio. Tarkastellaan joukkoa
$$E_k := \{x \in (a, b) : f'(x) \text{ on olemassa ja } |f'(x)| > k\}.$$
Osoita, että tämän joukon ulkomitta toteuttaa
$$m^*(E_k) \leq \frac{1}{k} V_f(a, b).$$

5. Määritellään
$$f(x) := \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Selvitä perustellen, millä parametrin $\alpha > 0$ arvoilla funktio $|f|^\alpha$ on absoluuttisesti jatkuva välillä $[0, 1]$.

English version on the other side.

Real analysis I / Hytönen
Exam 3 h 30 min — 18.5.2016

Solve four (4) problems of your own choice among the following. Warning: If you return too many solutions, one of them will not be graded, and not necessarily the weakest one!

1. Let $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^n$ be the Borel σ-algebra of $\mathbb{R}^n$, and $\operatorname{Leb}\mathbb{R}^n$ the σ-algebra of all measurable sets. Show that $\operatorname{Bor}\mathbb{R}^2 \neq \operatorname{Leb}\mathbb{R}^2$. You can use other results proved in the course without proving them.

2. Let $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, and denote $\tau_h f(x) := f(x+h)$, when $x, h \in \mathbb{R}^n$. Prove that
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$
You may use a density result, if you like, as long as you explain, which result you use.

3. A set $E \subset \mathbb{R}^n$ is called *porous*, if there is a constant $\alpha > 0$, such that every ball $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ (where both $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$ are arbitrary) contains a smaller ball $B(y, \alpha r) \subset B(x, r) \setminus E$.
Prove that every measurable porous set has measure zero. (Think of points of density.)

4. Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a function of bounded variation. Consider the set
$$E_k := \{x \in (a, b) : f'(x) \text{ exists, and } |f'(x)| > k\}.$$
Show that the outer measure of this set satisfies
$$m^*(E_k) \leq \frac{1}{k} V_f(a, b).$$

5. Define the function
$$f(x) := \begin{cases} x \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Find and explain the range of the parameter $\alpha > 0$ for which the function $|f|^\alpha$ is absolutely continuous on the interval $[0, 1]$.

Suomeksi kääntöpuolella.