

Sallitut omat tarvikkeet:

- Kirjoitusvälineet.
- Ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttävä laskin.
- Yksi käsinkirjoitettu (saa olla molemmin puolin) korkeintaan A4-kokoinen ”lunttilappu”.

*

Yritä ratkaista kaikki tehtävät. Muista perustella ratkaisusi. Hyvä ajatus on kirjoittaa auki käyttämäsi määritelmät, vaikka sitä ei erikseen pyydetäisi. Kirjoita jokaiseen arvosteltavaan paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja kokeen päivämäärä. Rauhoitu, keskity, menesty.

*

- Määrittele satunnaisvektorin \mathbf{V} kovarianssimatriisi $\text{Cov}(\mathbf{V})$.
 - Kirjoita $\text{Cov}(\mathbf{V})$ auki kaksiulotteisessa tilanteessa $\mathbf{V} = (X, Y)$ seuraavilla kahdella tavalla:
 - kummankin satunnaismuuttujan X ja Y varianssin sekä niiden kovarianssin avulla ja
 - kummankin satunnaismuuttujan X ja Y varianssin sekä niiden korrelaatiokerroimen avulla.
 - Perustele, miksi korrelaatiokerroin ρ toteuttaa ehdon $-1 \leq \rho \leq 1$. (Tätä ei tarvitse todistaa alkeista lähtien. Riittää, kunhan selvität, mihin yleiseen tulokseen tämä perustuu.)
- Satunnaisvektorilla (X, Y) on jatkuva jakauma. Olkoon sen tiheysfunktio $f_{X,Y}(x, y)$.
 - Määritä satunnaismuuttujan $Z = X + 2Y$ tiheysfunktio $f_Z(z)$ (ja osoita erityisesti, että Z on jatkuva satunnaismuuttuja).
 - Laske $f_Z(z)$ auki tilanteessa, jossa $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ ja $X \perp\!\!\!\perp Y$. Tarkista, että saamasi tulos todella toteuttaa tiheysfunktion vaatimukset.
- Opettaja suunnittelee todennäköisyyslaskennan tehtäväsarjaa. Hän ei ole etukäteen päättänyt tehtävien lukumäärää, mutta laatii joka tapauksessa ainakin yhden tehtävän. Aina, kun yksi tehtävä on valmis, opettaja heittää kolikkoa. Jos tulos on kruuna, hän päättää, että tehtäväsarja on valmis ja lopettaa. Jos tulos on klaava, hän keksii vielä yhden tehtävän lisää. Sama toistuu aina uuden tehtävän valmistuttua. Oletetaan, että jokaisen uuden tehtävän laatimiseen kuluu satunnainen aika $X_i \sim \text{Exp}(1)$ (yksikkönä tunti). Lisäksi eri tehtävien laadinta-ajat ja eri kolikon heitot ovat kaikki toisistaan riippumattomia. Olkoon Y tehtävien satunnainen lukumäärä näin laadittavassa tehtäväsarjassa ja Z kokonaisaika, joka tehtäväsarjan laatimiseen kuluu. Oletetaan, että kolikon heittämiseen kuluva aika on olemattoman vähäinen.
 - Kirjoita satunnaismuuttujalle Z lauseke satunnaismuuttujien Y ja $X_i, i \geq 1$, avulla.
 - Määritä $E[Z|Y]$ ja $\text{Var}[Z|Y]$.
 - Määritä $E[Z]$ ja $\text{Var}[Z]$.
- Olkoot $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ ja $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, missä $X \perp\!\!\!\perp Y$. Merkitään $Z = X + Y$.
 - Määritä sellainen vakio $a \in \mathbb{R}$ ja sellainen satunnaismuuttujien X ja Y lineaarikombinaatio V , että $X = aZ + V$ ja $Z \perp\!\!\!\perp V$.
 - Määritä ehdollinen jakauma $X | (Z = z)$.

(English on the other side. – Englanniksi toisella puolella.)

Admissible tools:

- Writing equipment.
- A calculator of the kind allowed in the Finnish matriculation exams (not overly advanced).
- One hand-written (possibly two-sided) at most A4-size “cheat sheet”.

*

Try to solve all the problems. Remember to explain your reasoning. It is a good idea to write down the definitions that you use, even when it is not explicitly requested. On each paper to be graded, write down your name, your student number, the name of the course and the date of the exam. Calm down, concentrate, succeed.

*

- Define the covariance matrix $\text{Cov}(\mathbf{V})$ of a random vector \mathbf{V} .
 - Write out $\text{Cov}(\mathbf{V})$ in the two-dimensional case $\mathbf{V} = (X, Y)$ both in terms of
 - the variances and the covariance of the random variables X and Y , and
 - the variances and the correlation coefficient of the random variables X and Y .
 - Explain, why the correlation coefficient ρ satisfies $-1 \leq \rho \leq 1$. (You don't need to do this from the first principles. It is enough to explain the general result on which this is based.)
- The random vector (X, Y) has a continuous distribution with density function $f_{X,Y}(x, y)$.
 - Determine the density function $f_Z(z)$ of the random variable $Z = X + 2Y$ (and show, in particular, that Z is a continuous random variable).
 - Compute $f_Z(z)$ in the situation that $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ and $X \perp\!\!\!\perp Y$. Check that the result indeed satisfied the requirements for a density function.
- A teacher is planning an exercise set on probability, but hasn't decided about the number of exercises to be included; however, there will be at least one exercise. Whenever an exercise is finished, the teacher tosses a coin. If the result is heads, the teacher decides that the exercise set is complete, and nothing more is needed. If the result is tails, the teacher will invent yet another exercise. The same procedure is repeated after each completed exercise. Suppose that the time needed to prepare each new exercise is a random variable $X_i \sim \text{Exp}(1)$ (in the unit of hours). Moreover, the preparation times for different exercises and the results of the coin tosses are all independent of each other. Let Y be the random number of exercises in the exercise set so prepared, and Z be the total time needed to prepare the exercise set. Suppose that the time needed to toss the coin is negligible.
 - Write down a formula for the random variable Z in terms of the random variables Y and X_i , $i \geq 1$.
 - Determine $E[Z|Y]$ and $\text{Var}[Z|Y]$.
 - Determine $E[Z]$ and $\text{Var}[Z]$.
- Let $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ and $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, where $X \perp\!\!\!\perp Y$. Denote $Z = X + Y$.
 - Find a number $a \in \mathbb{R}$ and a linear combination V of the random variables X and Y such that $X = aZ + V$ and $Z \perp\!\!\!\perp V$.
 - Determine the conditional distribution $X | (Z = z)$.

(Suomeksi toisella puolella. – Finnish on the other side.)