MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN OSASTO
MAT21007 Mitta ja integraali
Kurssikoe 7.5.2019
Koeaikaa: 2 t 30 min.
Valitse ja ratkaise 4 **(neljä)** tehtävää viidestä.

1.(i) Määrittele käsitteet Lebesgue mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^d$ sekä d-ulotteinen Lebesguen mitta (ulkomittaa ei tarvitse määritellä).

(ii) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^d$ osajoukko ja $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Näytä, että on olemassa sellainen avoin joukko G, että $A \subset G$ ja

$$m_d^*(G) \leq m_d^*(A) + \varepsilon.$$

2. Olkoot $A, B \subset \mathbf{R}^d$ sellaisia Lebesgue mitallisia joukkoja, että d-ulotteinen Lebesguen mitta $m_d(A \cap B) < \infty$. Näytä, että

$$m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B) - m_d(A \cap B).$$

3. Olkoon $f : E \to [0, \infty)$ mitallinen kuvaus, missä $E \subset \mathbf{R}^d$ on mitallinen joukko jolle $m_d(E) < \infty$. Määritellään $E_k = \{x \in E : 0 < f(x) < \frac{1}{k}\}$ kun $k \in \mathbb{N}$. Näytä, että E_k on mitallinen joukko kaikilla k, ja

$$\lim_{k \to \infty} m_d(E_k) = 0.$$

Muistutus: mittojen konvergenssilauseet.

4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ ja $f_j : E \to [0, \infty]$ jono mitallisia kuvauksia, missä $j \in \mathbb{N}$.

(i) Esitä monotonisen konvergenssin lause (MKL) oletuksineen (lausetta *ei* tarvitse todistaa).

(ii) Esitä Fatoun lemma oletuksineen ja todista se monotonisen konvergenssin lauseen avulla.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^\infty \frac{e^{-x} \cos(\frac{x}{k})}{1 + \frac{x}{k}} dx.$$

Jos käytät jotakin konvergenssilausetta, niin perustele miksi lauseen oletukset ovat voimassa!

Exam questions in English: please turn the page!

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
MAT21007 Mitta ja integraali (Measure and integral)
Course exam 7.5.2019
Time: 2 h 30 min.
Select and solve **4 (four)** problems out of five.

1.(i) Define the concepts Lebesgue measurable set $A \subset \mathbb{R}^d$ and d-dimensional Lebesgue measure (you do not need to define the outer measure).

(ii) Let $A \subset \mathbb{R}^d$ be a subset and $\varepsilon > 0$ arbitrary. Show that there is an open set G, such that $A \subset G$ and

$$m_d^*(G) \leq m_d^*(A) + \varepsilon.$$

2 Let $A, B \subset \mathbf{R}^d$ be Lebesgue measurable sets such that the d-dimensional Lebesgue measure $m_d(A \cap B) < \infty$. Show that

$$m_d(A \cup B) = m_d(A) + m_d(B) - m_d(A \cap B).$$

3. Let $f : E \to [0, \infty)$ be a measurable mapping, where $E \subset \mathbf{R}^d$ is a measurable set for which $m_d(E) < \infty$. Define $E_k = \{x \in E : 0 < f(x) < \frac{1}{k}\}$ for $k \in \mathbb{N}$. Show that E_k is a measurable set for all k and that

$$\lim_{k \to \infty} m_d(E_k) = 0.$$

Reminder: convergence theorems for measures.

4. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ and $f_j : E \to [0, \infty]$ be a sequence of measurable mappings, where $j \in \mathbb{N}$.

(i) State the monotone convergence theorem (MCT) including the assumptions (do *not* prove the MCT).

(ii) State Fatou's lemma including the assumptions and prove this result with the help of the monotone convergence theorem.

5. Compute the limit

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^\infty \frac{e^{-x} \cos(\frac{x}{k})}{1 + \frac{x}{k}} dx.$$

If you use some convergence theorems, please verify that their assumptions are satisfied.

Tehtävät suomeksi: käännä sivu!