Mitta ja Integraali
Kesä 2015
Loppukoe

"I haven't failed. I just found 10 000 ways that won't work."

-Thomas Edison

Tehtävä 1 (6p) *Osoita ulkomitan määritelmää käyttäen, että rationaalilukujoukon* $\mathbb{Q}$ *ulkomitta on nolla:* $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Tehtävä 2 (3+3p) *(a) Osoita, että jos* $m_n^*(E) = 0$, *niin* $E \subset \mathbb{R}^n$ *on* m_n-*mitallinen.*

(b) Olkoon joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ *mitallinen ja joukko* $A \subset \mathbb{R}^n$ *sellainen, että* $E \cap A = \emptyset$. *Osoita Caratheodoryn ehdon avulla, että*

$$m_n^*(E \cup A) = m_n(E) + m_n^*(A). \tag{1}$$

Tehtävä 3 (3+3p) *(a) Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ *kun* $x \in \mathbb{Q}$ *ja* $f(x) = x^2$ *kun* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Osoita, että funktio* f *on mitallinen.*

(b) Olkoon funktio $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mitallinen ja funktio* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sellainen, että* $h(x) = g(x)$ *melkein kaikilla* x. *Osoita, että myös* h *on mitallinen.*

Tehtävä 4 (6p) *Laske raja-arvo*

$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{1 + e^{-kx^2}}{x^2}\, dx.$$

(Perustele mahdollisen konvergenssilauseen oikeutus. Huomaa: $\int_1^k = \int \chi_{[1,k]}$.*)*