

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Helsingin yliopisto**  
**Erilliskuulustelu**  
**12.3.2015**

1. (a) Oletetaan, että  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  on lineaarikuvaus, jolle pätee  $L(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 2)$  ja  $L(0, 0, 1) = (1, 0, 4, -2)$ . Määritä  $L(-2, 0, 2)$ .  
(b) Tutkitaan kuvausta  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , jolle pätee

$$\begin{aligned}g(1, 0) &= (1, 1), \\g(0, 1) &= (1, -1), \\g(1, 1) &= (2, 0), \\g(2, 2) &= (4, 0).\end{aligned}$$

Onko kuvaus  $g$  välttämättä lineaarinen?

2. (a) Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anna esimerkki avaruuden  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  aliavaruudesta, johon matriisi  $A$  kuuluu ja matriisi  $B$  ei kuulu. Perustele vastauksesi.

- (b) Onko polynomiavaruuden  $\mathcal{P}$  jono  $(x, 2x + 1, x^3)$  vapaa?  
3. Osoita aliavaruuden määritelmän perusteella, että joukko

$$W = \{(2a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

on avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruus.

4. (a) Kaverisi on opiskellut lineaarialgebraa, mutta ei ole kuullut ominaisarvon tai ominaisvektorin käsitteestä. Selitä hänelle lyhyesti omin sanoin, mitä ovat lineaarikuvauksen ominaisarvot ja ominaisvektorit.  
(b) Merkitään  $\bar{w} = (-2, 3)$ . Tutkitaan projektiokuvausta

$$P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad P(\bar{x}) = \frac{\bar{x} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

Osoita lineaarikuvauksen ominaisarvon määritelmän avulla, että kuvauksella on ominaisarvot 1 ja 0.

5. (a) Määritä lineaarikuvauksen

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (4x_2, 5x_1 + x_2, x_1)$$

standardimatriisi.

- (b) Oletetaan, että  $T: V \rightarrow W$  on lineaarikuvaus, ja  $\dim(V) > \dim(W)$ . Voiko  $T$  olla injektio?