

# Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

Kurssikoe 4.3.2020

Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto

- (a) Onko olemassa sellaista lineaarikuvausta  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , että  $L(1, 1, 2) = (0, 1, 1)$ ,  $L(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ , ja  $L(1, 2, 2) = (5, 6, 7)$ ? Perustele vastauksesi.  
(b) Olkoon  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineaarikuvaus, jolle pätee  $L(1, 0) = (1, 2, 0)$  ja  $L(0, 1) = (1, 1, 1)$ . Laske  $L(3, 4)$ .

- Vektoriavaruuden  $V$  osajoukkoa  $W$  sanotaan *aliavaruudeksi*, jos seuraavat ehdot pätevät:

- $\bar{w} + \bar{u} \in W$  kaikilla  $\bar{w}, \bar{u} \in W$ .
- $c\bar{w} \in W$  kaikilla  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{w} \in W$
- $\bar{0} \in W$ .

- Osoita, että joukko

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

on  $2 \times 2$  -matriiseista koostuvan vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  aliavaruus.

- Onko joukko  $W$  vektoriavaruus? Perustele vastauksesi lyhyesti.

- Avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2.$$

Tässä tehtävässä käytetään kyseistä sisätuloa. Tutkitaan aliavaruutta  $W = \text{span}((-3, 1))$ .

- Onko vektori  $(1, 3)$  kohtisuorassa komplementissa  $W^\perp$ ? Entä vektori  $(2, 12)$ ?
- Määritä aliavaruus  $W^\perp$  ja etsi sille jotkin virittäjät.
- Piirrä kuva, jossa näkyy aliavaruudet  $W$  ja  $W^\perp$ . Miten selität sen, että nämä aliavaruudet eivät kuvassa näytä olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan?

**Huomaa, että koe jatkuu toisella sivulla!**

4. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Todista tai anna vastaesimerkki.

(a) Jokainen lineaarikuvaus  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  on surjektio.

(b) Jos  $V$  on vektoriavaruus ja lineaarikuvauksella  $L : V \rightarrow V$  on ominaisarvo  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja sitä vastaavat ominaisvektorit  $\bar{v}$  ja  $\bar{u}$ , niin myös vektori  $\bar{v} + \bar{u}$  on ominaisarvoa  $\lambda$  vastaava ominaisvektori.

5. (a) Mitä tarkoittaa, että vektoriavaruudet  $U$  ja  $V$  ovat isomorfiset? Anna matemaattisesti täsmällinen määritelmä ja kerro lisäksi, mikä on sen taustalla oleva idea.

(b) Tiedetään, että reaalisten  $2 \times 2$  -diagonaalimatriisien joukko

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, | a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

on vektoriavaruus. Osoita, että se on isomorfinen avaruuden  $\mathbb{R}^2$  kanssa (vihje: yksi tapa tehdä tämä on etsiä sopiva lineaarikuvaus).