Kurssikoe: Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, 20.12.2017.
Vastuuopettaja Martina Aaltonen.
Apuvälineet: MAOL, Laskin

**Tehtävä 1.** Olkoon
$$W = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$
a) Osoita, että $W$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.
b) Vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä sisätulo asettamalla
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$
kaikilla $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Kuuluuko vektori $(1, 1)$ aliavaruuden $W \subset \mathbb{R}^2$ kohtisuoraan komplementtiin $W^\perp \subset \mathbb{R}^2$ tämän sisätulon suhteen?

**Tehtävä 2.** Polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudella
$$\mathcal{P}_2 = \{p \in \mathcal{P} \mid p = 0 \text{ tai } \deg(p) \leq 2\}$$
on kanta $\mathcal{T} = (x^2 - x + 1, x - 1, 1)$.

a) Määritä vektoriavaruuden $\mathcal{P}_2$ dimensio.
b) Määritä vektorin $p = x^2 - x + 2$ koordinaattivektori $[p]_\mathcal{T}$ kannan $\mathcal{T}$ suhteen.

**Tehtävä 3.** Olkoon
$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$
a) Määritä kuvauksen $L$ standardimatriisi.
b) Määritä kuvan $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbb{R}^2$ dimensio. Määritä edelleen (esimerkiksi dimensiolausetta hyödyntäen) ytimen $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathbb{R}^3$ dimensio.

**Tehtävä 4.** Olkoon
$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2) = (x_2, x_1),$$
tason $\mathbb{R}^2$ peilaus suoran $span((1, 1))$ suhteen.
a) Osoita, että lineaarikuvauksella $L$ on ominaisarvot $\lambda = 1$ ja $\lambda = -1$.
b) Onko lineaarikuvaus $L$ injektio? Perustele.