Linjäralgebra och matrisräkning II
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 21.12.2016

Provtiden är 2,5 timmar. I provet får räknare eller tabellbok ej användas.

1. Utred i följande fall, ifall det finns en linjär avbildning L, som uppfyller följande krav. Ifall avbildningen finns, ge formeln som definierar avbildningen.

   (a) Vi antar, att $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ och $L(0,1,-1) = (-1,-1)$, $L(-2,2,0) = (-3,2)$ samt $L(-2,0,2) = (0,1)$.

   (b) Vi antar, att $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och L sträcker ut vektorn $(-1,1)$ till fyrdubbel längd samt roterar vektorn $(1,0)$ medsols 90 grader.

2. (a) Är mängden $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid abc = 0\}$ ett delrum till rummet $\mathcal{P}_2$?

   (b) Nedan har bevisats, att
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
   är ett delrum till rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Bevisets logiska struktur innehåller dock brister och är heller inte skrivet med bra matematisk stil. Skriv om beviset och rätta bristerna. Använd i din lösning fullständiga svenska meningar.

   Bevis:
$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix}$$
$$r\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. I denna uppgift undersöker vi vektorrummets $\mathbb{R}^2$ delrum $W = \operatorname{span}((-1,2,-1),(1,1,1))$ samt vektorn $\bar{v} = (2,-5,1)$. Innerprodukten är definierad som vanlig punktprodukt.

   (a) Bestäm $\operatorname{proj}_W(\bar{v})$. (Minnesuppfriskning: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)

   (b) Din kompis har studerat linjäralgebra, men har inte hört talas om det ortogonala komplementet. Förklara till kompisen med ord, vad ortogonalt komplement betyder. Du får, om du vill, även rita konceptbilder.

   (c) Skriv vektorn $\bar{v}$ som en summa av två vektorer, varav den ena tillhör delrummet W och den andra det ortogonala komplementet $W^{\perp}$.

4. (a) Den linjära avbildningen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speglar planets vektorer över linjen $\operatorname{span}((-7,5))$. Sök, utan att bestämma matrisen, den linjära avbilndingens L egenvärden. Förklara, varför talen du hittade är avbildningens egenvärden. Motiveringarna behöver inte vara noggranna, utan du kan referera till till exempel en bild.

   (b) Låt V vara ett vektorrum, med basen $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Vi antar, att $L\colon V \to W$ är en linjär avbildning. Visa, att om $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ är en bas, så är L en isomorfism.

Kom ihåg, att du får 4 provpoäng av att svara på How you learn -frågeformuläret. Linken till formuläret har skickats till dig per e-post. Svara senast 23.12.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 21.12.2016

Koeaika on 2,5 tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. Selvitä seuraavissa tapauksissa, onko olemassa lineaarikuvausta L, joka toteuttaa annetut ehdot. Jos kuvaus on olemassa, anna kuvauksen määrittelevä kaava.
   (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ja $L(0,1,-1) = (-1,-1)$, $L(-2,2,0) = (-3,2)$ sekä $L(-2,0,2) = (0,1)$.
   (b) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja L venyttää vektorin $(-1,1)$ nelinkertaiseksi sekä kiertää vektoria $(1,0)$ myötäpäivään 90 astetta.

2. (a) Onko joukko $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2 \mid abc = 0\}$ avaruuden $\mathcal{P}_2$ aliavaruus?
   (b) Ohessa on osoitettu, että

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus. Todistuksen loogisessa rakenteessa on kuitenkin puutteita, eikä se ole hyvällä matemaattisella tyylillä kirjoitettu. Kirjoita todistus uudelleen korjaten puutteet. Käytä ratkaisussasi kokonaisia suomen kielen virkkeitä.
   Todistus:

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+2c & b+d \\ -b+(-d) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a+c) & b+d \\ -(b+d) & 0 \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} 2a & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(2a) & rb \\ r(-b) & r\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ra) & rb \\ -(rb) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tässä tehtävässä tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}((-1,2,-1),(1,1,1))$ sekä vektoria $\bar{v} = (2,-5,1)$. Sisätulona on tavallinen pistetulo.
   (a) Määritä $\operatorname{proj}_W(\bar{v})$. (Muistin virkistys: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)
   (b) Kaverisi on opiskellut lineaarialgebraa, mutta ei ole kuullut kohtisuorasta komplementista. Selitä hänelle sanallisesti, mitä kohtisuora komplementti tarkoittaa. Voit halutessasi piirtää myös havainnekuvia.
   (c) Kirjoita vektori $\bar{v}$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen kohtisuoran komplementin $W^\perp$ alkio.

4. (a) Lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa tason vektorit suoran $\operatorname{span}((-7,5))$ suhteen. Etsi matriisia määrittämättä lineaarikuvauksen L ominaisarvot. Selitä, miksi löytämäsi luvut ovat kuvauksen ominaisarvoja. Perusteluiden ei tarvitse olla tarkat, vaan voit nojautua niissä esimerkiksi piirrokseen.
   (b) Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$. Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarikuvaus. Osoita, että jos $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n))$ on kanta, niin L on isomorfismi.
   avaruuden W

Muista, että saat 4 koepistettä HowULearn-kyselyyn vastaamisesta. Kyselyn linkki on lähetetty sinulle sähköpostitse, ja pääset kirjautumaan kyselyyn myös osoitteessa learn.helsinki.fi. Vastaa kyselyyn viimeistään 23.12.