

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kurssikoe 16.12.2015**

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa. Muista perustella kaikki vastauksesi huolellisesti.

1. Tutkitaan vektoriavaruuden  $\mathbb{R}^{2 \times 3}$  aliavaruutta  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  sekä kuvausta

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow W, \quad L(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Osoita, että  $L$  on lineaarikuvaus.  
(b) Määritä ydin  $\text{Ker } L$  ja kuva  $\text{Im } L$ .  
(c) Ovatko vektoriavaruudet  $\mathbb{R}^2$  ja  $W$  isomorfiset?  
(d) Kaverisi tietää, mitä vektoriavaruuden ovat, mutta hän ei ole kuullut lineaarikuvauksista. Selitä kaverillesi, mitä c-kohdan tulos tarkoittaa ilman, että mainitset lineaarikuvauksia.
2. (a) Keksi matriisavaruuden  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  aliavaruus, johon matriisi  $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}$  kuuluu, mutta matriisi  $\begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ei kuulu.  
(b) Tässä tehtävässä käsitellään funktioista koostuvan vektoriavaruuden  $\mathcal{F}$  aliavaruutta  $W = \text{span}(f, g, h)$ , missä

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= 3x - 4, \\ g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= x^2 \quad \text{ja} \\ h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Aliavaruudella  $W$  on kanta  $\mathcal{B} = (f, g, h)$ . Mikä on vektorin

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = 6x - 3\sin(x) - 8$$

koordinaattivektori kannan  $\mathcal{B}$  suhteen?

3. (a) Oletetaan, että lineaarikuvaukselle  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  pätee  $T(0, 1, -1, 1) = (-1, -1, 0)$  ja  $T(-2, 2, 0, 1) = (-3, 2, 1)$ . Määritä  $T(-2, 0, 2, -1)$ .  
(b) Tutkitaan avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruutta  $W = \text{span}((1, 1, 1), (-1, 2, -1))$ .  
i. Määritä  $\text{proj}_W((1, 0, 0))$ . (Muistin virkistys:  $\text{proj}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$ .)  
ii. Projektiokuvaus  $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p(\vec{x}) = \text{proj}_W(\vec{x})$  on lineaarinen. Määritä kuvauksen  $p$  matriisi.

4. (a) Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad L(a + bx + cx^2) = a + b + c + (a + b + c)x + (a + b + c)x^2.$$

Kuvauksella  $L$  on ominaisarvot 0 ja 3. Keksi jotkin näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

- (b) Oletetaan, että  $V$  on sisätuloavaruus ja  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ . Oletetaan lisäksi, että vektori  $\vec{w} \in V$  on kohtisuorassa vektoreita  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  vastaan. Osoita, että  $\vec{w}$  on aliavaruuden  $\text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  kohtisuorassa komplementissa.