Linjär algebra och matrisräkning II
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 12.12.2012

I provet får man använda miniräknare men inte tabellbok.

1. *(8 poäng)*

   (a) Antag att $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning, för vilken $L(1,0) = (1,5)$ och $L(0,1) = (4,0)$. Bestäm $L(4,2)$.

   (b) Antag att $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning, för vilken $T(1,0) = (1,5,3)$ och $T(0,1) = (4,0,1)$. Bestäm matrisen för T.

2. *(6 poäng)*

   (a) Bestäm egenvärdena och de motsvarande egenrummen till matrisen
   $$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (b) En egenvektor till matrisen A är $(0,-2)$. Förklara kort vad det betyder.

3. *(10 poäng)* I polynomrummet $\mathcal{P}_1$ kan man definiera en inre produkt med följande formel:
   $$\langle ax+b, cx+d\rangle = 2ac + 3bd \quad \text{för varje } ax+b, cx+d \in \mathcal{P}_1.$$

   (a) Bestäm normen $\|3x+1\|$.

   (b) Vilka av följande polynom hör till det ortogonala komplementet $W^\perp$ till delrummet $W = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$?

   a) $x - 1$ b) $3x - 2$

4. *(14 poäng)*

   (a) Vilka är delrummen av vektorrummet $\mathbb{R}^3$? Du kan beskriva delrummen med egna ord och behöver ej motivera dina svar.

   (b) Låt $W = \{(r - 2s,\ 4s,\ 3r - s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. Visa utgående från definitionen av ett delrum att W är ett delrum av vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

   (c) Sök vektorer som spänner upp det ovannämnda delrummet W.

   (d) Vad är dimensionen av delrummet W? Kom ihåg att motivera ditt svar.

5. *(10 poäng)* Låt $L\colon V \to W$ vara en bijektiv linjär avbildning. Antag att rummet V har basen $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k)$. Visa att följden $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_k))$ utgör en bas för rummet W.

Ge kursrespons! Din respons är viktig för oss eftersom vi vill utveckla undervisningen. Du får via WebOodi ett email med en länk varifrån du kommer åt att ge responsen. Genom att ge respons får man extra poäng motsvarande tre räkneövningsuppifter utan stjärna.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 12.12.2012

Kokeessa saa käyttää laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. *(8 pistettä)*

   (a) Oletetaan, että $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1,0) = (1,5)$ ja $L(0,1) = (4,0)$. Määritä $L(4,2)$.

   (b) Oletetaan, että $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $T(1,0) = (1,5,3)$ ja $T(1,1) = (4,0,1)$. Etsi matriisi, jonka määräämä lineaarikuvaus T on.

2. *(6 pistettä)*

   (a) Määritä matriisin
   $$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$
   ominaisarvot.

   (b) Eräs matriisin A ominaisvektori on $(0,-2)$. Selitä lyhyesti, mitä se tarkoittaa.

3. *(10 pistettä)* Polynomiavaruudessa $\mathcal{P}_1$ voidaan määritellä sisätulo seuraavalla kaavalla:
   $$\langle ax+b, cx+d\rangle = 2ac + 3bd \quad \text{kaikilla } ax+b, cx+d \in \mathcal{P}_1.$$

   (a) Määritä normi $\|3x+1\|$.

   (b) Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat aliavaruuden $W = \{ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$ kohtisuoraan komplementtiin $W^{\perp}$?

   a) $x - 1$ b) $3x - 2$

4. *(14 pistettä)*

   (a) Mitkä ovat vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudet? Voit kuvailla aliavaruuksia omin sanoin, eikä vastauksia tarvitse perustella.

   (b) Olkoon $W = \{(r-2s,\ 4s,\ 3r-s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$. Osoita aliavaruuden määritelmän avulla, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

   (c) Etsi edellisen kohdan aliavaruudelle W jotkin virittäjävektorit.

   (d) Mikä on aliavaruuden W dimensio? Muista perustella vastauksesi.

5. *(10 pistettä)* Olkoon $L\colon V \to W$ bijektiivinen lineaarikuvaus. Oletetaan, että avaruudella V on kanta $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Osoita, että jono $(L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_k))$ on avaruuden W kanta.

Anna kurssipalautetta! Palautteesi on meille tärkeää, sillä haluamme kehittää opetusta. Saat WebOodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautteen. Palautteen antamisesta myönnetään lisäpisteitä saman verran kuin kolmesta tähdettömästä laskuharjoitustehtävästä.