Linjär algebra och matrisräkning I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Allmän tentamen 11.1.2017

1. Ta reda på hur många lösningar ekvationssystemet har i följande fall. Motivera dina svar.

   (a) Ekvationssystemets motsvarande matris har med elementära radoperationer fåtts i formen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   (b) Ekvationssystemets koefficientmatris kan med elementära radoperationer ändras till

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 6 \\ 8 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Spänner vektorerna $\bar{v}_1 = (2, 1, -3)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 1)$ och $\bar{v}_3 = (1, 0, -4)$ upp rummet $\mathbb{R}^3$?

   (b) Ge ett exempel på ett tredimensionellt delrum till rummet $\mathbb{R}^4$. Motivera ditt svar.

3. (a) Bestäm koordinaterna för $\bar{v} = (2, 5)$ med avseende på basen $((-1, 2), (0, 3))$.

   (b) Beteckna $\bar{v}_1 = (1, 0, 3)$, $\bar{v}_2 = (1, 1, 0)$ och $\bar{v}_3 = (-1, 0, a)$, där $a \in \mathbb{R}$. För vilka värden på a är följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ fri?

4. Vi betecknar $\bar{w} = (-2, 1)$ och $\bar{v} = (3, -4)$.

   (a) Beräkna projektionen $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. *Minnesuppfriskning:* $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$

   (b) Rita en bild av vektorerna $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ och $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Förklara med egna ord, hur skillnadsvektorn $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ hör ihop med definitionen av projektion.

5. (a) Visa att $\bar{v} = (1, -2)$ är en egenvektor till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

   Vad är det motsvarande egenvärdet? Motivera ditt svar med hjälp av definitionen för egenvärden.

   (b) Vi betecknar $\bar{w} = (-2, 1)$. Det finns en 2×2 -matris A, för vilken det gäller att då man multiplicerar vektorer med den, så projiceras vektorerna i delrummet som spänns upp av $\bar{w}$. Med andra ord gäller $A\bar{x} = \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{x})$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$. Matrisen A har två egenvärden. Vilka är de? Noggranna motiveringar krävs inte, du kan t.ex. använda en bild som stöd för dina motiveringar.

Vi	Ål
	0
22	6
30	7
30	13
22	20
34	21
47	22
48	35
56	41
57	54
65	46