Linjär algebra och matrisräkning I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Kursprov 26.10.2016

I provet får räknare eller tabellbok ej användas. Kom ihåg att motivera alla dina svar.

1. Vi undersöker vektorerna $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$ och $\bar{v}_3 = (1, -1, 1)$.
   (a) Är följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ fri? Motivera ditt svar med definitionen för vektorers frihet.
   (b) Spänner vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ upp rummet $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar med hjälp av definitionen för uppspänning.
   (c) Beskriv hur delrummet $\text{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ ser ut. Kom ihåg att motivera ditt svar.

2. (a) Matrisen A har egenvektorn $\bar{v} = (3, -1)$. Vilka av följande vektorer kunde vara $A\bar{v}$ och vilka ej? Ifall vektorn kan vara $A\bar{v}$, berätta, vilket egenvärde hör till vektorn $\bar{v}$.
   $$\bar{a} = (2, 4), \qquad \bar{b} = (-1, 1/3), \qquad \bar{c} = (6, -2, 0)$$
   (b) Matrisen B har egenvärdet $1/2$, som hör till egenvektorerna $\bar{w}$ och $\bar{u}$. Visa, att även $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ är en egenvektor till vilken egenvärdet $1/2$ hör.

3. (a) Din kompis påstår, att ett ekvationssystem har oändligt många lösningar, ifall det i dens motsvarande trappstegsmatris finns en nollrad. (Det vill säga raden har endast nollor både till höger, samt till vänster om strecket.) Ge ett exempel på en trappstegsmatris, i vilken det finns en nollrad, men dess motsvarande ekvationssystem har
      i. exakt en lösning
      ii. inga lösningar.

   Kom ihåg att motivera ditt svar.
   (b) Vi antar, att A är en kvadratisk matris, för vilken $A^2 - 3A + I = O$ gäller. Visa, att matrisen A är inverterbar, och att dens inversmatris är $3I - A$.

4. (a) Aladdin far med sin matta från sitt palats mot solnedgången. Han styr då sin matta med riktningsvektorn $\bar{w} = (-5, -1, 2)$. Efter att ha åkt en bit, gör Aladdin en rätvinklig sväng och kommer då till skattgrottan. Skattgrottans platsvektor räknat från palatset är $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.
      i. Bestäm vektorns $\bar{v}$ projektion på delrummet som vektorn $\bar{w}$ spänner upp.
      ii. Förklara med egna ord och bilder, på vilket sätt projektionen vi räknade i föregående deluppgift och Aladdins flygresa är relaterade.

   Minnesuppfriskning: $\text{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$
   (b) Vi vill ta reda på, ifall vektorerna $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$ bildar en bas för rummet $\mathbb{R}^3$. Då vi undersöker ifall rummets $\mathbb{R}^3$ vektor $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$, får vi ett ekvationssystem, vars koefficientmatris determinant är -13. Är det fråga om en bas? Förklara noggrant din slutlednings mellansteg.

5. Svara efter provet på ett kort frågeformulär gällande Stack-uppgifterna. Du får 4 provpoäng av att svara. Linken till formuläret skickas till dig per e-post och den hittas även på kurshemsidan.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 26.10.2016

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa. Muista perustella kaikki vastauksesi.

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1,1,1)$, $\bar{v}_2 = (0,2,0)$ ja $\bar{v}_3 = (1,-1,1)$.
   (a) Onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ vapaa? Perustele vastauksesi vapauden määritelmän avulla
   (b) Virittävätkö vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$? Perustele vastauksesi virittämisen määritelmän avulla.
   (c) Kuvaile, miltä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ näyttää. Muista perustella vastauksesi.
2. (a) Matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (3,-1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Jos vektori voi olla $A\bar{v}$, kerro, mikä silloin on vektoria $\bar{v}$ vastaava ominaisarvo.
   $$\bar{a} = (2,\ 4), \qquad \bar{b} = (-1, 1/3), \qquad \bar{c} = (6,-2,0)$$
   (b) Matriisilla B on ominaisarvo $1/2$, jota vastaaavat ominaisvektorit $\bar{w}$ ja $\bar{u}$. Osoita, että myös $-4\bar{w} + 2\bar{u}$ on ominaisarvoa $1/2$ vastaava ominaisvektori.
3. (a) Kaverisi väittää, että yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuja, jos sitä vastaavassa porrasmuotoisessa matriisissa on nollarivi. (Toisin sanoen rivillä on nollia sekä viivan oikealla että vasemmalla puolella.) Anna hänelle esimerkki porrasmatriisista, jossa esiintyy nollarivi mutta jota vastaavalla yhtälöryhmällä on
      i. täsmälleen yksi ratkaisu
      ii. ei yhtään ratkaisua.

   Muista perustella vastauksesi.
   (b) Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.
4. (a) Aladdin lähtee matollaan palatsistaan kohti laskevaa aurinkoa. Tällöin hän ohjaa mattoaan suuntavektorilla $\bar{w} = (-5,-1,2)$. Edettyään jonkin matkaa Aladdin tekee suorakulmaisen käännöksen ja päätyy aarreluolalle. Aarreluolan paikkavektori palatsista laskettuna on $\bar{v} = (-22, 20, 0)$.
      i. Määritä vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle.
      ii. Selitä omin sanoin ja kuvin, millä tavoin edellisessä kohdassa laskettu projektio liittyy Aladdinin lentomatkaan.

   Muistin virkistys: $\operatorname{proj}(\bar{v})_{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$
   (b) Halutaan selvittää, muodostavatko eräät vektorit $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan. Kun tutkitaan, voiko avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$ kirjoittaa vektoreiden $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ ja $\bar{u}_3$ lineaarikombinaationa, päädytään yhtälöryhmään, jonka kerroinmatriisin determinantti on -13. Onko kyseessä kanta? Selitä huolellisesti päättelysi välivaiheet.
5. Vastaa kokeen jälkeen Stack-tehtäviä koskevaan lyhyeen kyselyyn. Saat kyselyyn vastaamisesta 4 koepistettä. Kyselyn linkki lähetetään sinulle sähköpostitse ja se löytyy myös kurssisivulta.