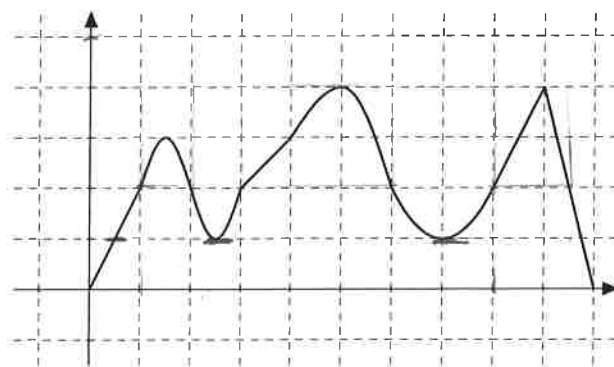


**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus yliopistomatematiikkaan**  
**2. kurssikoe 14.12.2015**

*Laskimen käyttö on sallittu. Taulukkokirjan käyttö on kielletty.*

1. (a) Tarkastellaan funktiota  $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ , jonka kuvaaja on näkyvässä alla. Määritä kuva  $f[1, 8]$  sekä alkukuvat  $f^{-1}[2, 4]$  ja  $f^{-1}\{1, 5\}$ .



- (b) Tarkastellaan kuvausta  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , jolla  $f(a, b) = (3a - 1, a + b)$  kaikilla  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Onko kuvaus  $f$  injektio? Entä surjektio?

2. (a) Määritellään säännöt  $\tau$  ja  $\rho$  asettamalla  $\tau(n) = n^2 - 4n + 3$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  ja

$$\rho\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2 + 1}{b^2 + 4}$$

kaikilla  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Onko  $\tau$  kuvaus  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ? Onko  $\rho$  kuvaus  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ ?

- (b) Tarkastellaan kuvausta  $f: \mathbb{R} \rightarrow [2, \infty[$ , jolla  $f(x) = x^2 + 2$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Kurssikaverisi piti tutkia, onko tällä kuvauksella käänteiskuvausta. Hän määritteli kuvauksen  $g: [2, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , jolla  $g(x) = \sqrt{x - 2}$ , ja tutki yhdistettyä funktiota  $f \circ g$ :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x - 2}) = (\sqrt{x - 2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x.$$

Tästä hän päätteli, että  $g$  on funktion  $f$  käänteisfunktio.

Onko johtopäätös oikea? Miten neuvoisit kurssikaveriasi tässä tehtävässä?

3. Määritellään joukon  $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  relaatio  $\sim$  seuraavasti:

$$x \sim y, \text{ jos ja vain jos } x - y = k\sqrt{2} \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Osoita, että relaatio  $\sim$  on ekvivalenssirelaatio.  
 (b) Määritä ekvivalenssiluokka  $[4 + 5\sqrt{2}]_{\sim}$ . Kirjoita lisäksi näkyviin ainakin kolme eri alkioita, jotka kuuluvat tähän ekvivalenssiluokkaan.

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

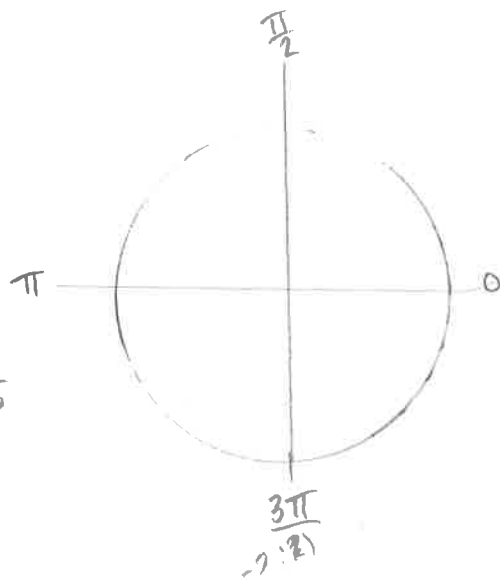
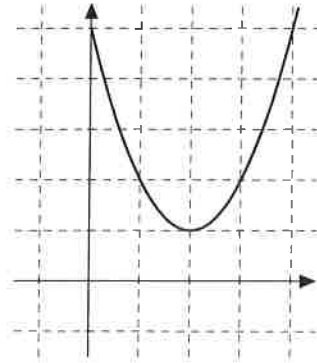
$$n^2 \dots = (n - 3)(n - 1)$$

Käännä!  
 $a = \frac{1}{3}$

$$3 \cdot a - 1$$

*Reduktion  
 Symmetrisch  
 Transitiv*

4. (a) Määritä luvun  $-125i$  eksponenttiesitys ja ratkaise yhtälö  $z^3 = -125i$ .  
Piirrä kuva kompleksitasosta ja merkitse löytämäsi ratkaisut siihen.
- (b) Tarkastellaan paraabelia  $y = x^2 + kx + 5$ . Päätele, mikä parametrin  $k$  arvo on alla olevassa kuvassa ja ratkaise yhtälö  $x^2 + kx + 5 = 0$ .



$$\begin{aligned} & (2+i)^2 - 4(2+i) + 5 \\ &= 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{2\pi}{3} \times \frac{3\pi}{2} &= \frac{4\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \\ \frac{4\pi}{3} \times \frac{\pi}{2} &= \frac{8\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$