

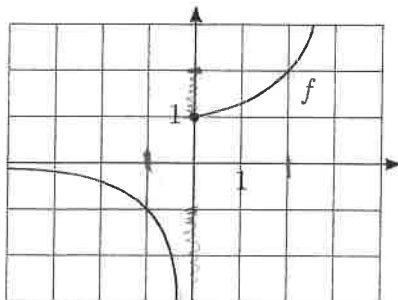
## Johdatus yliopistomatematiikkaan

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kurssikoe 22.12.2017 (2 sivua)

Ohjeita:

- Vastaa neljään tehtävään: tehtäviin 1-3 ja lisäksi joko tehtävään 4 tai tehtävään 5.
- Ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille, jos tilaa riittää.
- Laskimen käyttäminen on sallittua, taulukkokirjan ei.
- Käytä kurssilla opetettuja ratkaisutapoja ja muista perustella vastauksesi.

1. a) Tarkastellaan kuvausta  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jonka kuvaaja on alla. Olkoon  $A = [-1, 2]$  (suljettu väli). Määritä kuvaajan perusteella joukko  $f^{-1}A$ . Perustele lyhyesti kuvaan vedoten.



- b) Tarkastellaan kuvausta

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(n) = n^2 - 2n.$$

Olkoon  $B = \{0, 1, 2\}$ . Määritä joukko  $gB$ . Perustele lyhyesti.

- c) Olkoot  $f$  ja  $g$  kuten edellisissä kohdissa. Määritä joukko  $(f \circ g)[B]$ . Perustele lyhyesti.

2. a) Osoita matemaattisella induktiolla, että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $n$  pätee

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1.$$

- b) Oletetaan, että  $n$  on kokonaisluku. Tarkastellaan väitettä

” $n^2 - 1$  on jaollinen luvulla 4, jos ja vain jos  $n$  on pariton”.

Esitä tämän väitteen todistuksen rakenne. Voit valita esitystavan vapaasti, mutta esityksestä täytyy käydä selvästi ilmi, minkälaisia osia todistuksessa on, mitä näistä osista todistetaan epäsuorasti sekä mitkä ovat kuhunkin osaan liittyvät oletukset ja johtopäätökset. Älä kirjoita koko todistusta, vaan esitä vain todistuksen rakenne.

3. Tarkastellaan kuvausta  $f: [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x-1}$  sekä kuvausta  $g: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[$ ,  $g(x) = x^2 + 1$ . Kaverisi on laskenut, että

$$g(f(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Tämän perusteella hän toteaa, että  $g$  on kuvauksen  $f$  käänteiskuvaus. Oletko vakuuttunut kaverisi järjestyksestä? Onko  $g$  todella kuvauksen  $f$  käänteiskuvaus? Jos ei ole, voitko löytää kuvaukselle  $f$  käänteiskuvauksen?

$f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2} = |x|$   
KÄÄNNÄ

Vastaa vain toiseen seuraavista tehtävistä. Tehtävä 4 liittyy kompleksilukuihin ja tehtävä 5 tietojenkäsittelytieteen matematiikkaan.

4. Tarkastellaan kompleksilukua  $z = -3 + 3i$ .
- Määritä luvun  $z$  liittoluku ja käänteisluku. Ilmaise käänteisluku muodossa  $a + bi$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - Määritä luvun  $z$  eksponenttiesitys ja laske osamäärä  $\frac{z}{2e^{i\pi}}$ . Anna vastaus eksponenttietäytksessä.
  - Kirjoita jokin reaalikertoiminen polynomiyhtälö, jolla on yhtenä ratkaisuna luku  $z$ . Perustelee.
5. a) Erään geometrisen lukujonon  $(a_n)$  kolmas jäsen on  $a_3 = 5$  ja neljäs jäsen  $a_4 = 3$ . Määritä lukujonon suhdeluku ja ensimmäinen jäsen.
- b) Ratkaise logaritmien avulla luku  $x$  yhtälöstä  $b = c \cdot 4^x$ , missä luvut  $b$  ja  $c$  ovat positiivisia reaalilukuja.
- c) Korttipakassa on yhteensä 52 korttia, joista tasan 4 on ässiä. Montako sellaista 5 kortin joukkoa on olemassa, joissa on vähintään 3 ässiä? (Voit ilmaista vastauksen kaavan muodossa, jos sinulla ei ole laskinta.)