

Introduktion till statistisk inferens Kursprov 11. 5. 2015

Obs. I kursprovet får ni använda en kalkylator samt en dubbelsidig handskriven "luntlapp" av storlek A4. Egna tabeller eller formelsamlingar får inte användas. Den erforderliga tabellen finns som bihang.

1. Ett mynt är viktat på ett för oss okänt sätt, så att vi inte vet med vilken sannolikhet man erhåller en klave vid myntsingling. Låt denna sannolikhet vara θ , där $0 < \theta < 1$. Vi betraktar ett försöksarrangemang, där myntet singlar 100 gånger och man räknar antalet klavar X .

a) Vilken fördelning, som beror av θ , har den stokastiska variabeln X (fördelningens benämning och frekvensfunktion)?

b) Vilket är maximum-likelihood-estimatet till parametern θ , då man erhöll $X = 65$ klavar? Motivera.

2. Den genomsnittliga brotthållfastheten av ett rep har varit 1800 kg. Fabriken ändrar tillverknings sättet och önskar att brotthållfastheten ökar efter detta. Man undersökte 16 rep som producerats på det nya sättet och erhöll 1840 kg som deras genomsnittliga brotthållfastheter, där standardavvikelsen var 70 kg. Testa på signifikansnivån 0.05 om man kan dra slutsatsen att den genomsnittliga brotthållfastheten verkligen har ökat. Kom ihåg att tydligt formulera de hypoteser som testas. Anta att variationerna av brotthållfastheten är (approximativt) normalfördelade.

3. a) Parametern θ i den statistiska modellen $f(\mathbf{y}; \theta)$ är endimensionell dvs. reell. På basen av data \mathbf{y} bör man bilda 95 %:s konfidensintervall $[L, U]$ för θ , där L och U är reella tal. Förklara vad som avses med detta och speciellt hur talet 95 % eller 0.95 bör förstås i tolkningen.

b) Anta att man har funnit sampelkarakteristikan i modellen i a-fallet, dvs. en transformation $t = t(\mathbf{y})$ av data, så att för motsvarande stokastiska variabel $T = t(\mathbf{Y})$ gäller att $T - \theta \sim N(0, 1)$ för alla värden på θ . Härled med hjälp av detta 95 %:s konfidensintervall för θ (dvs. uttryck för talen L och U).

4. Framme finns tre identiska skålar, som var och en innehåller fem bollar: i skål 1 finns fem vita bollar, i skål 2 finns två vita och tre svarta bollar och i skål 3 finns en vit och fyra svarta bollar.

En av skålarna väljs på måfå, men numret K (1, 2 eller 3) av den utvalda skålen avslöjas inte, utan det är en okänd parameter. Från den utvalda skålen drar man bollar på måfå, så att den dragna bollen alltid returneras till skålen före nästa dragning. Den första bollen som dras är svart och likaså den andra dragna bollen är svart. Formulera apriorifördelningen och härled aposteriorifördelningen till K .

Tabell: u -övriga kvantiler $t_\nu(u)$ till t -fördelningen, för vilka $u = P(X > t_\nu(u))$, då $X \sim t_\nu$. Här är ν frihetsgradtalet till fördelningen och t_∞ avser standardnormalfördelningen $N(0, 1)$.

$\nu \backslash u$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090