

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Introduktion till sannolikhetskalkyl (svenskspråkiga kursen)
Kursprovet 9.3.2015

Påminnelse: en tvåsidig minneslapp med storlek A4 får medtas till provtillfället

1. En tärning kastas 5 gånger. Beräkna sannolikheten att ögontalen 1 och 2 båda uppträder åtminstone en gång. *Tips: skriv om $P(A \cap B)$ med hjälp av $P(A^c)$, $P(B^c)$ och $P(A^c \cap B^c)$ för lämpliga händelser A och B .* $21/243$ $0,87$

2. I 3 boxar finns följande antal bollar: den första boxen innehåller 2 vita bollar och 2 svarta bollar, den andra boxen innehåller 1 vit boll och 3 röda bollar och den tredje boxen innehåller 2 röda bollar och tre svarta bollar. Man väljer först slumpmässigt en box och drar därefter 2 bollar på måfå utan återläggning från denna box.

(i) Beräkna sannolikheten att båda bollarna är röda. $0,6$

(ii) Om båda bollarna är röda, beräkna den betingade sannolikheten att man har valt den andra boxen i första skedet. $0,28$ $5/18$

3. Anta att X och Y är stokastiska variabler definierade på ett utfallsrum Ω , för vilka $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$, samt X och Y är oberoende stokastiska variabler. Definiera $Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$ då $\omega \in \Omega$.

(i) Bestäm fördelningsfunktionen F_Z till Z .

(ii) Beräkna sannolikheten $P(0 < Z < 1)$. $0,4579$

Påminnelse: $Z(\omega) \leq t$ om och endast om $X(\omega) \leq t$ och $Y(\omega) \leq t$.

4. Ett symmetriskt mynt singlar 60 gånger. Låt X vara antalet kronor i singlarerna.

(i) Ange den exakta formeln för sannolikheten $P(20 \leq X \leq 40)$ att erhålla från 20 till 40 kronor.

(ii) Använd normalapproximation till att uppskatta ovanstående sannolikhet. (Svaret kan innehålla lämpliga värden av fördelningsfunktionen Φ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.) $0,99017$

På motstående sida finns en tabell över värden av fördelningsfunktionen $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.

Taulukko 1. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1.4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1.5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Introduktion till sannolikhetskalkyl (svenskspråkiga kursen)
Kursprovet 9.3.2015

Påminnelse: en tvåsidig minneslapp med storlek A4 får medtas till provtillfället

1. En tärning kastas 5 gånger. Beräkna sannolikheten att ögontalen 1 och 2 båda uppträder åtminstone en gång. *Tips:* skriv om $P(A \cap B)$ med hjälp av $P(A^c)$, $P(B^c)$ och $P(A^c \cap B^c)$ för lämpliga händelser A och B .

2. I 3 boxar finns följande antal bollar: den första boxen innehåller 2 vita bollar och 2 svarta bollar, den andra boxen innehåller 1 vit boll och 3 röda bollar och den tredje boxen innehåller 2 röda bollar och tre svarta bollar. Man väljer först slumpmässigt en box och drar därefter 2 bollar på måfå utan återläggning från denna box.

(i) Beräkna sannolikheten att båda bollarna är röda.

(ii) Om båda bollarna är röda, beräkna den betingade sannolikheten att man har valt den andra boxen i första skedet.

3. Anta att X och Y är stokastiska variabler definierade på ett utfallsrum Ω , för vilka $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$, samt X och Y är oberoende stokastiska variabler. Definiera $Z(\omega) = \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$ då $\omega \in \Omega$.

(i) Bestäm fördelningsfunktionen F_Z till Z .

(ii) Beräkna sannolikheten $P(0 < Z < 1)$.

Påminnelse: $Z(\omega) \leq t$ om och endast om $X(\omega) \leq t$ och $Y(\omega) \leq t$.

4. Ett symmetriskt mynt singlar 60 gånger. Låt X vara antalet kronor i singlarerna.

(i) Ange den exakta formeln för sannolikheten $P(20 \leq X \leq 40)$ att erhålla från 20 till 40 kronor.

(ii) Använd normalapproximation till att uppskatta ovanstående sannolikhet. (Svaret kan innehålla lämpliga värden av fördelningsfunktionen Φ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.)

På motstående sida finns en tabell över värden av fördelningsfunktionen $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ till en standardnormalfördelad stokastisk variabel.

Taulukko 1. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1.4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1.5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9