Integralkalkyl 2024

Examen

Till tenten får du ta med dig 7 ensidiga A4-sidor handskrivna anteckningar. Inga böcker, miniräknare, mobiltelefoner, datorer, etc.

Besvara fyra uppgifter.

1. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x-4}{(x+2)(x-2)}\,dx.$

2. Låt $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{när } x = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

   Ge en uppdelning av intervallet $[0,1]$ så att skillnaden mellan över- och undersumman för funktionen f är högst $\frac{1}{10}$.

3. Markus beräknar derivatan f' på följande sätt, när $f(x) = \int_0^{e^x} \sin e^t\, dt$:

   Enligt analysens grundsats är derivering och integration inversa operationer. Således är

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{e^x} \sin e^t\, dt = [\sin e^t]_0^{e^x} = \sin e^{e^x} - \sin e.$$

   Sök felet i resonemanget och presentera en korrekt härledning av derivatan.

4. Konvergerar eller divergerar integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x + \ln x + e^x}{\sin x + \ln x + x^2 + e^{2x}}\,dx$? Kom ihåg att motivera ditt svar.

5. Låt (f_k) vara en följd av funktioner $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, med ett tal $M > 0$ sådant att

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \le M 2^{-k}$$

   för alla $x \in [a,b]$ och $k = 1, 2, \dots$. Visa att f_n konvergerar likformigt mot någon funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Lycka till med tenten och tack för kursen!

Integraalilaskenta kevät 2024

Tentti

Tenttiin saa tuoda 7 yksipuolisen A4-sivun verran omakätisiä muistiinpanoja. Ei kirjoja, laskimia, kännyköitä, tietokoneita, jne.

Vastaa neljään tehtävään.

1. Laske integraali $\int_0^1 \frac{x^2+2x-4}{(x+2)(x-2)}\,dx$.

2. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x = \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   Etsi sellainen välin $[0,1]$ jako, että sitä vastaavien ylä- ja alasumman erotus funktiolle f on korkeintaan $\frac{1}{10}$.

3. Markus laskee seuraavasti derivaattaa f', kun $f(x) = \int_0^{e^x} \sin e^t\,dt$:

   Analyysin peruslauseen mukaan derivointi ja integrointi ovat käänteisiä operaatioita. Siten

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{e^x} \sin e^t\,dt = [\sin e^t]_0^{e^x} = \sin e^{e^x} - \sin e.$$

   Etsi päättelystä virhe ja esitä korjattu derivaatan lasku.

4. Suppeneeko vai hajaantuuko integraali $\int_0^1 \frac{x+\ln x+e^x}{\sin x+\ln x+x^2+e^{2x}}\,dx$? Muista perustella vastauksesi.

5. Olkoon (f_k) jono sellaisia funktioita $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, että on olemassa $M > 0$, jolle

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq M2^{-k}$$

   kaikilla $x \in [a,b]$ ja $k = 1, 2, \dots$. Osoita, että f_n suppenee tasaisesti kohti jotakin funktioita $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Onnea tenttiin ja kiitos kurssista!