HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Integralkalkyl
Kursprov 10.3.2016

1. Beräkna integralerna (a) $\int xe^{3x}\,dx$ och (b) $\int_0^1 (3x-2)^{99}\,dx$.

2. Undersök om den oegentliga integralen $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$ konvergerar.

3. Låt $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$.
   (a) Undersök om det finns en delning J av intervallet $[-1,1]$, för vilken skillnaden av över- och undersumman satisfierar $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) > 2$.
   (b) Bestäm de punkter $z \in (-1,1)$ som förekommer i integralkalkylens medelvärdessats för integralen
   $$\int_{-1}^1 f(x)\,dx.$$
   Rita en bild som åskådliggör den geometriska tolkingen av integralkalkylens medelvärdessats, från vilken framgår de områden i planet som har samma area.

4. Låt $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gränsfunktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig i intervallet $[0,1]$?
   (c) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Obs! Ett svar som erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.