

HU / Institutionen för matematik och statistik
Inledning till universitetsmatematik
2. kursprov 15.12.2014

Instruktioner:

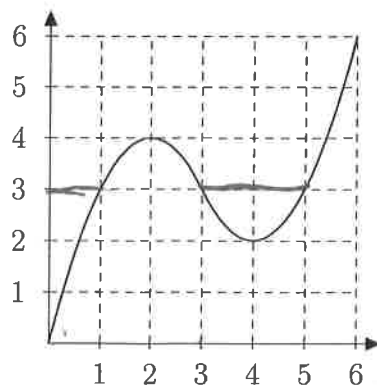
★ Svara på fyra uppgifter: uppgifterna 1-3 och antingen uppgift 4 eller 5.

1. (a) Vi definierar reglerna f och g genom

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{om } x < 4; \\ x, & \text{om } |x| \geq 4, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{om } x > 4; \\ x^2, & \text{om } |x| \leq 4. \end{cases}$$

Är f en avbildning $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$? Är g en avbildning $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$?

- (b) Anta, att $a \in \mathbb{Z}$. Visa med indirekt härledning att om $a^2 - 2a + 7$ är ett udda tal, så är a ett jämnt tal.
2. (a) Vi betraktar funktionen $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(m, n) = 2m + n$. Är f en injektion? Är f en surjektion?
- (b) Bilden nedan föreställer grafen till en funktion $h: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$. Bestäm bilden $h[0, 3]$ och Urbilden $h^{-1}[0, 3]$ utifrån nedanstående bild. Skriv dessutom ut definitionerna för bild och Urbild.



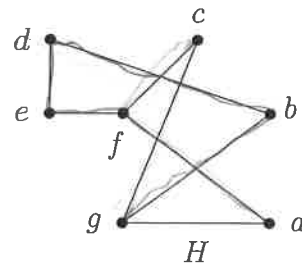
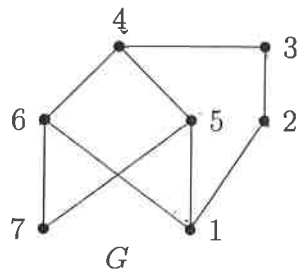
3. Vi bestämmer relationen \sim på mängden \mathbb{Z} genom $a \sim b$, om $a^2 - b^2 = 4k$ för något $k \in \mathbb{Z}$.
- (a) Visa att \sim är en ekvivalensrelation.
- (b) Skriv definitionen för ekvivalensklassen $[1]_{\sim}$ och räkna upp sex olika element i denna ekvivalensklass.

Obs! Gör antingen uppgift 4 eller 5

4. (a) Skriv talet $1 + i\sqrt{3}$ i exponentiell form.
(b) Beräkna $(1 + i\sqrt{3})^{10}$ med hjälp av de Moivers formel. Skriv resultatet i formen $a + bi$, där $a, b \in \mathbb{R}$.
(c) Lös den komplexa ekvationen $(x^2 + 6x + 13)(x^4 + 81) = 0$ och märk ut lösningarna i det komplexa planet.
5. (a) Låt $a, b \in \mathbb{Z}$, där $a \equiv 5 \pmod{7}$ och $b \equiv 3 \pmod{7}$. Bestäm talet $c \in \mathbb{Z}$ för vilket $0 \leq c < 7$ och $a^2 + b \equiv c \pmod{7}$.
(b) Bestäm största gemensamma faktorn av talen 66 och 420, dvs. $\text{sgf}(66, 420)$. Bestäm två tal $x, y \in \mathbb{Z}$ som satisfierar ekvationen

$$60 = 66x + 420y$$

- (c) Är grafen G tudelad? Är H tudelad? Är G och H isomorfa? Motivera svaren kort.



HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan
2. kurssikoe 15.12.2014

Ohjeita:

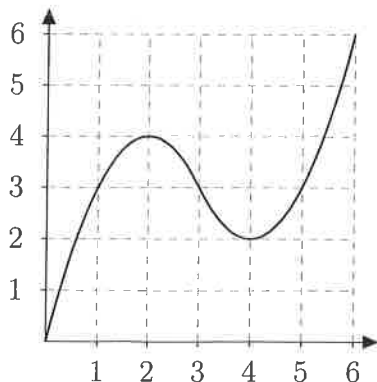
- * *Kaikki ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille, jos tila riittää.*
- * *Käytä kurssilla opetettuja ratkaisutapoja ja muista perustella vastauksesi.*
- * *Tehtäviä ei ole järjestetty vaikeustason mukaan.*

1. (a) Määritellään säännöt f ja g asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } x < 4; \\ x, & \text{jos } |x| \geq 4, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{jos } x > 4; \\ x^2, & \text{jos } |x| \leq 4. \end{cases}$$

Onko f kuvaus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$? Entä onko g kuvaus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$?

- (b) Oletetaan, että $a \in \mathbb{Z}$. Osoita epäsuoraa päättelyä käyttäen, että jos $a^2 - 2a + 7$ on pariton, niin a on parillinen.
2. (a) Tarkastellaan funktiota $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, jolla $f(m, n) = 2m + n$. Onko f injektio? Entä surjektio?
- (b) Alla on näkyvissä funktion $h: [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja. Määritä sen avulla kuva $h[0, 3]$ ja alkukuva $h^{-1}[0, 3]$. Anna lisäksi kuvan ja alkukuvan käsitteiden määritelmät.



3. Määritellään joukon \mathbb{Z} relaatio asettamalla $a \sim b$, jos $a^2 - b^2 = 4k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.
- (a) Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio.
- (b) Kirjoita määritelmä ekvivalenssiluokalle $[1]_{\sim}$ ja luettele kuusi eri alkioita tästä ekvivalenssiluokasta.
4. (a) Muodosta luvun $1 + i\sqrt{3}$ napaesitys tai eksponenttesitys.
- (b) Laske Moivre'n kaavan avulla $(1 + i\sqrt{3})^{10}$. Kirjoita tulos muodossa $a + bi$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.
- (c) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $(x^2 + 6x + 13)(x^4 + 81) = 0$ ja merkitse löytämäsi ratkaisut kompleksitasoon.