

HU / Institutionen för matematik och statistik  
Inledning till universitetsmatematik  
1. kursprov 20.10.2014

Instruktioner:

- ★ **Svara på fyra uppgifter:** uppgifterna 1–3 samt antingen uppgift 4 eller uppgift 5.
- ★ Alla lösningar kan skrivas på samma konceptpapper om det finns nog med utrymme.
- ★ Använd lösningsmetoder som du lärt dig på kursen och kom ihåg att motivera dina svar.

1. (a) Skriv följande mängd i formen  $\{x \in X \mid \text{villkor som } x \text{ satisfierar}\}$ : alla heltal som är den tredje potensen av något naturligt tal.
- (b) Vi betraktar mängden  $A = \{1, \{1, 2\}, \{2\}, 3, \{3\}\}$ . Motivera, vilka av följande påståenden är sanna och vilka som är falska.

- i.  $\{1, 2\} \subset A$       ii.  $\emptyset \in A$       iii.  $(4, 3) \in \mathbb{Q} \times A$   
iv.  $\{1, 3\} \subset A$       v.  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

2. Visa med induktion, att för alla  $n \in \mathbb{N}$  gäller

$$1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (2n + 1) \cdot 3^n = n \cdot 3^{n+1} + 1.$$

3. Anta, att  $X$  är en mängd och att  $A, B, C$  och  $Y$  är delmängder till  $X$ . Är följande påståenden sanna för alla mängder  $A, B, C, Y$  och  $X$ ?

- (a) Om  $A \cap C = \emptyset$ , så gäller  $A \cup (B \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus C$ .  
(b) Om  $Y \subset \mathcal{C}(A \setminus B)$ , så gäller  $Y \subset B$ .

4. (a) Bestäm realdelen, imaginärdelen, multiplikativa inversen och konjugatet till  $z$  då

$$z = \frac{3 - 4i}{1 + 2i}.$$

Rita en bild där det framstår vilken punkt i det komplexa planet motsvarar talet  $z$ . Märk även ut additiva och multiplikativa inversen samt konjugatet till talet  $z$ .

- (b) Vi antar, att  $z, w \in \mathbb{C}$ . Visa, att  $z\bar{w} + \bar{z}w$  är reellt.

5. (a) Är följande påståenden gällande heltal sanna eller falska? Motivera! Bilda även ett ekvivalent påstående till negationen av påstående i där negationssymbolen  $\neg$  inte förekommer.

- i.  $\forall x(x^2 > x \wedge x + 2 > x)$       ii.  $\forall x \exists y(xy = 0 \wedge x + y < 0)$   
iii.  $\exists x \forall y(xy = 0 \vee xy = 1)$

- (b) En glasskiosk säljer 30 liter glass den 1 juli. Därefter ökar försäljningen varje dag med 2% ända fram till 1 augusti. Därefter minskar försäljningen varje dag med 1%. Hur många liter glass såldes den 31 augusti? Hur många liter glass såldes totalt under tiden 1.7-31.8?  
(Kom ihåg: juli har 31 dagar)