

FUNCTIONAL ANALYSIS – KURSSIKOE 1/EXAM 1 – 11.3.16 klo/at 12.15-14.45

1. Suppenevatko seuraavat jonot $(f_n)_{n=1}^\infty$ Banach-avaruudessa $C(0, 1)$ (yksikkövälin $[0, 1]$ jatkuvat funktiot, sup-normi; $t \in [0, 1]$ on muuttuja):

$$\text{a) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+n}, \quad \text{b) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+\frac{1}{n}}, \quad \text{c) } f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$$

2. Tarkastellaan Hilbert-avaruuden ℓ^2 alkioita

$$\alpha = (1, 0, 0, 0, \dots) \quad , \quad \beta = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots)$$

eli α on jono, jonka ensimmäinen alkio 1 ja muut nolliä, sekä β jono, jonka $2n-1$:s ja $2n$:s alkio ovat 2^{-n+1} . a) Mikä on joukon $\{\alpha\}$ ortogonaalinen komplementti? b) Etsi jokin $x \in \ell^2$, $x \neq 0$, jolle pätee $(x|\alpha) = (x|\beta) = 0$.

3. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\cos(2t) + \int_{-1}^1 \frac{\sin(2s)}{50+t^2} f(s)^2 ds - f(t) = 1 \quad , \quad t \in [-1, 1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-1, 1)$. Voit pitää tunnettuna, että kaavassa esiintyvä integraalilauseke on t :n jatkuva funktio, kun $f \in C(-1, 1)$.

4. Muistutetaan mieleen, että Banach-avaruuden X osajoukko B on kompakti, jos jokaisella joukkoon B sisältyvällä jonolla $(x_n)_{n=1}^\infty$ on suppeneva osajono. Valitsemalla sopiva jono osoita, että avaruuden ℓ^2 suljettu yksikköpallo $\overline{B}(0, 1) = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ ei ole kompakti.

1. Do the following sequences $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge in the Banach-space $C(0, 1)$ (continuous functions on the interval $[0, 1]$ with sup-norm; $t \in [0, 1]$ is a variable):

$$\text{a) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+n}, \quad \text{b) } f_n(t) = \frac{1}{t+2+\frac{1}{n}}, \quad \text{c) } f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$$

2. In the Hilbert-space ℓ^2 , let us consider the elements

$$\alpha = (1, 0, 0, 0, \dots) \quad , \quad \beta = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots)$$

in other words α is a sequence with the first element 1 and others 0, and β is a sequence with $2n-1$:st and $2n$:th elements 2^{-n+1} . a) What is the orthogonal complement of the set $\{\alpha\}$? b) Find some $x \in \ell^2$, $x \neq 0$ such that $(x|\alpha) = (x|\beta) = 0$.

3. Prove that the integral equation

$$\cos(2t) + \int_{-1}^1 \frac{\sin(2s)}{50+t^2} f(s)^2 ds - f(t) = 1 \quad , \quad t \in [-1, 1],$$

has a solution in $C(0, 1)$. You do not need to prove that the integral expression in the equation is a continuous function of t , when $f \in C(-1, 1)$.

4. Let us recall that a subset B of a Banach space X is compact, if every sequence $(x_n)_{n=1}^\infty$ contained in B has a convergent subsequence. By choosing a suitable sequence, show that the closed unit ball $\overline{B}(0, 1) = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ of ℓ^2 is not compact.