FUNCTIONAL ANALYSIS 13.5.2016
EXAM / KURSSIKOE 2 h 30 min A111

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka on $2\pi$-periodinen sekä 2 kertaa jatkuvasti derivoituva (joten esim. $f(0) = f(2\pi)$ ja sama derivaatoille). Osoita, että $f$:n Fourier-kertoimille $\hat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, pätee $|\hat{f}(m)| \leq C(1 + |m|)^{-2}$ kaikilla $m$, missä positiivinen vakio $C$ ei riipu $m$:stä.

2. Onko bilineaaarimuoto

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(2-x)dx$$

jatkuva (=rajoitettu) tai koersiivinen avaruudessa $L^2(0, 2)$ ?

3. Suppeneeko seuraava jono $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ jatkuvia lineaarisia operaattoreita, $T_n : C(-1, 1) \to C(-1, 1)$ a) pisteittäin, b) operaattorinormin mielessä, kun
$T_n f(t) = tf(1/n)$ missä $f \in C(-1, 1)$ ja $t \in [-1, 1]$ on muuttuja.

4. Olkoon $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ ja $a = (2^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$. Esitä, miten alkio $a$ määrittelee avaruuden $\ell^p$ duaalin alkion. Laske $a$:n normi avaruudessa $(\ell^p)^*$. (Käytä luennoilla esitettyjä tuloksia $\ell^p$-avaruuksien duaalista.)

**************************************************

1. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function, which is $2\pi$-periodic and 2 times continuously differentiable (hence e.g. $f(0) = f(2\pi)$ and the same for the derivatives). Prove that the Fourier-coefficients $\hat{f}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, of $f$ satisfy $|\hat{f}(m)| \leq C(1 + |m|)^{-2}$ for all $m$, where the positive constant $C$ does not depend on $m$.

2. Is the following bilinear form continuous (=bounded) or coercive in the space $L^2(0, 2)$,

$$B : (f, g) \mapsto \int_0^2 f(x)g(2-x)dx \quad ?$$

3. Does the following sequence $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ of continuous linear operators $T_n : C(-1, 1) \to C(-1, 1)$ converge a) pointwise b) in operator norm, when
$T_n f(t) = tf(1/n)$ where $f \in C(-1, 1)$ and $t \in [-1, 1]$ is a variable.

4. Let $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ and $a = (2^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$. How does the element $a$ define an element of the dual of $\ell^p$ ? Calculate the norm of $a$ in the space $(\ell^p)^*$. (Use the results on the dual space of $\ell^p$ which were presented on the lectures.)