

AVDELNINGEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
MAT11004 Differentialkalkyl
Kursprov 17.12.2019 kl 12.00-14.30

Tillåtna hjälpmedel: skrivmaterial och kalkylator.

Lämna utrymme överst på svarspappret för anteckning av poängtalen!

1 Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{4x^5 + 6}$$

med hjälp av kursens satser om gränsvärdet av funktioner. I uppgiften får du också använda kunskaper om gränsvärdet av en konstant funktion och av funktionen $f(x) = x$. Motivera noggrant!

2 Man betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = x^2 - \sin x.$$

Visa med hjälp av de egenskaper om kontinuerliga funktioner som behandlats på kursen att det finns ett minsta värde i mängden av värden som funktionen f antar. I uppgiften får man anta som känt att funktionen f är kontinuerlig.

3 Man betraktar funktionen $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = x^{2019} + x.$$

Visa med hjälp av kursens kunskaper att funktionen f har en strängt växande deriverbar invers funktion $f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$. Bestäm derivatan $(f^{-1})'(2)$ av den inversa funktionen.

4 Visa med hjälp av kursens kunskaper att för varje $x \geq 4$ gäller olikheten

$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1.$$

Det lönar sig att betrakta hjälpfunktionen som definieras av ekvationen

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}.$$