Differentialkalkyl, våren 2019
Kursprov 4.3.2019

I kursprovet får man använda en kalkylator, men inga andra hjälpmedel (det är exempelvis inte tillåtet att använda en tabellbok). Kom ihåg att motivera dina lösningar noggrant. **Obs.** Ett svar som erhållits med en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

1. Sök sådana reella tal a och b att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{då } -1 \leq x < 1, \\ ax+b, & \text{då } 1 \leq x < 2 \\ 3x, & \text{då } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

är kontinuerlig i sin definitionsmängd $[-1, 4)$. Motivera din lösning.

2. Bestäm de lokala extremvärdespunkterna och de lokala extremvärdena till funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,(x-5)^2}{4}.$$

Har funktionen ett största eller ett minsta värde?

3. Anta att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar villkoren

$$\sin x \leq f(x) \leq x$$

för varje $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ och $f(-x) = -f(x)$ då $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Visa att f är deriverbar i punkten $x = 0$ och $f'(0) = 1$.

4. Man definierar funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ på följande sätt

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+2}}$$

för alla $x \in [0, \infty)$. Visa att funktionen f har en invers funktion $f^{-1} : f([0, \infty)) \to [0, \infty)$. Bestäm definitionsmängden till den inversa funktionen. Beräkna $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.