MAT21013 Differentialekvationer II
Kursprov 11.5.2018 (tid: 2 h 30 min)

I kursprovet får ni ha med en ensidig handskriven minneslapp med storlek A4.

1. Undersök om vektorfunktionerna $t \mapsto \{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t)\}$ bildar ett fundamentalsystem av lösningar till det linjära differentialekvationssystemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \overline{x}(t), \quad t \in (0, \infty),$$

då $\overline{x}_1(t) = (-1, 1/t)^T$ och $\overline{x}_2(t) = (e^t, 0)^T$ för $t \in (0, \infty)$.

2. Sök alla lösningar till det homogena linjära differentialekvationssystemet

$$\overline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overline{x}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

med valfri metod.

3. Sök alla lösningar $(x_1(t), x_2(t))$ till det icke-homogena linjära differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) + e^{3t} \\ x_2'(t) &= 2x_2(t) - e^{3t} \end{aligned}$$

med valfri metod. *Tips:* vid matrismetoden lönar det sig att söka en lösning $t \mapsto \overline{x}_0(t) = e^{3t}\overline{a}$ till det icke-homogena systemet, där $\overline{a} = (a_1, a_2)^T \in \mathbf{R}^2$ är en okänd vektor.

4. Visa att $(0, 0)$ är den enda kritiska punkten till det autonoma DE-systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + x(t)y(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - x(t)y(t) - 2y(t), \end{aligned}$$

samt bestäm dess typ (stabil eller instabil) på basen av en linjärisering och Poincarés stabilitetssats.