

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017

Kurssikoe 9.5.2017

Kokeen kesto on kaksi ja puoli tuntia (2h 30min).

Kokeessa **EI SAA KÄYTTÄÄ LASKIMIA** eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4.

1. a) Etsi perusjärjestelmä systeemille

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (2 \text{ pistettä})$$

- b) Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ piste})$$

- c) Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6e^{2t} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ pistettä})$$

- d) Onko autonomisen systeemin

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

kriittinen piste $(0, 0)$ stabiili vai epästabiili? (1 piste)

2. Tutkitaan autonomista systeemiä

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t) - 4)(1 - y(t)) \\ y'(t) = (x(t) + 1)(x(t) - 4) \end{cases}$$

- a) Mitkä ovat systeemin kriittiset pisteet? (2 pistettä)
b) Mitkä ovat systeemin radat? (2 pistettä)
c) Luonnostelee piirtämällä systeemin aikakehitys/virtauskuvio. (2 pistettä)
d) Etsi systeemin linearisointi kriittisissä pisteissä. Mitä voit nyt päätellä kriittisten pisteiden laadusta Poincarén stabiilisuusu-lauseesta? (2 pistettä)

3. Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4 \text{ pistettä})$$

4. Tutkitaan differentiaaliyhtälöä

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

missä

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on olemassa ja $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 10$ kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
- $f(t, t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Onko olemassa sellaista ratkaisua $y_1(x)$, jolla $y_1(0) = 0$ ja y ei ole kolmesti derivoituva nollassa (eli $y_1'''(0)$ ei ole olemassa)? Perustele vastauksesi. (7 pistettä)