

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta

Kurssikoe

22. 12. 2016

Laskuaikaa 2,5 tuntia

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \infty.$$

2. Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^5 + x^7$ määriteltyä funktiota $f: [0, 2] \rightarrow [0, 160]$. Osoita, että funktiolla f on aidosti kasvava jatkuva käänteisfunktio $g: [0, 160] \rightarrow [0, 2]$, joka on derivoituva välillä $]0, 160[$. Määritä $g'(2)$.

3. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = |x^2 - 2x|$ määritelty funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 2$.

4. Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(e^{x^2})}{(x^4 + 1)e^{\sin x}}$$

määriteltyä funktiota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \leq f(a)$. Huom: Tässä tehtävässä ei kannata tarkastella derivaattaa!