HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 1
5.3.2015

1. (a) Bestäm konstanterna A och B så att
$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$
   (b) Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

2. Undersök ifall den oegentliga integralen $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$ konvergerar.

3. Låt $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ vara funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2, & 2 < x < 3, \\ 3, & 3 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$
och låt $1, 2, 2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, 3, 4$ vara indelningen J av intervallet $[1,4]$, där $n \in \mathbb{N}_1$, $n \geqslant 3$.
   (a) Beräkna undersumman $\underline{S}_J(f)$ och översumman $\overline{S}_J(f)$.
   (b) Visa på basen av del (a) och Riemanns integrerbarhetsvillkor att f är integrerbar.

4. (a) Låt $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ vara en funktion, vars andra derivata f'' är kontinuerlig på intervallet $[-1,1]$. Visa att
$$\int_{-1}^{1} x f''(x)\,dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1).$$
   (b) Beräkna
$$\int_{-1}^{1} x e^x\,dx.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Analyysi II
Kurssikoe 1
5.3.2015

1. (a) Määritä vakiot A ja B siten, että
$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$
   (b) Laske $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

2. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{x}\,dx$.

3. Olkoon $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$ funktio
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2, & 2 < x < 3, \\ 3, & 3 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$$
ja olkoon $1, 2, 2+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}, 3, 4$ välin $[1,4]$ jako J, missä $n \in \mathbb{N}_1$, $n \geqslant 3$.
   (a) Laske alasumma $\underline{S}_J(f)$ ja yläsumma $\overline{S}_J(f)$.
   (b) Osoita kohdan (a) ja Riemannin integroituvuusehdon perusteella, että f on integroituva.

4. (a) Olkoon $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ funktio, jonka toinen derivaatta f'' on jatkuva välillä $[-1,1]$. Osoita, että
$$\int_{-1}^{1} x f''(x)\,dx = f'(1) + f'(-1) - f(1) + f(-1).$$
   (b) Laske
$$\int_{-1}^{1} x e^x\,dx.$$