HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik

Analys II
Kursprov 2, 7.5.2015

1. Undersök om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{10^k}$ konvergerar.

2. Bestäm potensseriens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-5)^k$ konvergensradie, centrum och konvergensintervall.

3. Låt $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(n+1)x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gränsfunktionen $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig i intervallet $[0,2]$?
   (c) Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$.

4. (a) Bestäm Taylorutvecklingen $f(x) = T_2(x;0) + x^2\varepsilon(x)$ för funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   (b) Anta att $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar och $g(0) = 0$ samt $g'(0) = 2$. Beräkna
   $$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{\ln(1+x) - x}.$$

Obs! Ett svar som erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik

Analys II

Kursprov 2, 7.5.2015

$$\frac{\frac{k!}{2^k}}{\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}} = \frac{k!}{2^k} \cdot \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{2}{k+1}$$

1. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{10^k}$ konvergerar.

2. Bestäm potensseriens $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-5)^k$ konvergensradie, centrum och konvergensintervall.

3. Låt $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(n+1)x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Bestäm gränsfunktionen $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Är konvergensen $f_n \to f$ likformig i intervallet $[0,2]$?
   (c) Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$.

4. (a) Bestäm Taylorutvecklingen $f(x) = T_2(x;0) + x^2\varepsilon(x)$ för funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.
   (b) Anta att $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ är två gånger kontinuerligt deriverbar och $g(0) = 0$ samt $g'(0) = 2$. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{\ln(1+x) - x}.$$

Obs! Ett svar som erhållits med hjälp av en kalkylator räcker inte som motivering i någon av uppgifterna.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi II
Kurssikoe 2, 7.5.2015

1. Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}}{10^k}$.

2. Määritä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}(x-5)^k$ suppenemissäde, keskus ja suppenemisväli.

3. Olkoot $f_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(n+1)x}{n}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Määritä rajafunktio $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) Onko suppeneminen $f_n \to f$ tasaista välillä $[0,2]$?
   (c) Laske $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,dx$.

4. (a) Muodosta funktiolle $f(x) = \ln(1+x)$ Taylorin kehitelmä $f(x) = T_2(x;0) + x^2\varepsilon(x)$.
   (b) Oletetaan, että $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja $g(0) = 0$ sekä $g'(0) = 2$. Laske
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{\ln(1+x) - x}.$$

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.