HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Analys II
Kursprov 1
27.2.2014

1. Beräkna $\int_0^1 \sqrt{x}\sin(x^{3/2}-1)\,dx$.

2. Låt $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + c, & 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$$
där $c \in \mathbb{R}$ är en konstant.
   (a) Om $c = \frac{5}{3}$, finns det en punkt $z \in [-2,2]$ för vilken
$$f(z) = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx?$$
Varför motsäger din observation inte integralkalkylens medelvärdessats?
   (b) Bestäm konstanten $c \in \mathbb{R}$ så att du kan tillämpa integralkalkylens medelvärdessats på funktionen $f$ på intervallet $[-2,2]$. Vilken är den punkt $z \in [-2,2]$ som finns enligt satsen?

3. Undersök ifall den oegentliga integralen $\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ konvergerar.

4. Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara växande, och låt $J_n$ vara den ekvidistanta indelningen av intervallet $[a,b]$, där alltså $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ för alla $k = 1, 2, \ldots, n$.
   (a) Visa att skillnaden mellan översumman och undersumman satisfierar
$$\overline{S}_{J_n}(f) - \underline{S}_{J_n}(f) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}.$$
   (b) Visa på basen av del (a) och Riemanns integrerbarhetsvillkor att $f$ on integrerbar.