INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
2. kursprovet
16.12. 2010

1. Bestäm

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^4+1}$$

med hjälp av kursens satser. Motivera noggrant!

2. Funktionen f satisfierar för alla $x \leq 0$ villkoret $f(x) = x^3$ och för alla $x > 0$ villkoret $f(x) = x^2$. Är f deriverbar i punkten $x = 0$? Motivera noggrant!

3. Visa att det finns $a \in \mathbb{R}$, så att för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\frac{\sin(e^x)}{x^2+1} \leq \frac{\sin(e^a)}{a^2+1}.$$

I uppgiften lönar det sig kanske inte att använda derivatan.

4. Definiera funktionen $f\colon]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ med villkoret

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Visa att f är strängt avtagande.

4. Lösn, monotonicitet $\Leftrightarrow$ tecknet för f' (söker $f'(x)<0\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$)

$f'(x) = D(\frac{\sin x}{x}) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$x \mapsto x\cos x - \sin x$ då $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\cos x > 0$

$g(x): x \mapsto x - \frac{\sin x}{\cos x} = x - \tan x$

Visa $g(x)<0$, $\forall x\in]0,\frac{\pi}{2}[$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} < 0$ i $(0,\frac{\pi}{2})$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow g\downarrow \text{ i } (0,\frac{\pi}{2}) \\ \text{kont. i } (0,\pi/2)\end{array}\right\} \Rightarrow g(x) = x - \tan x < g(0) = 0 \quad \forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ i $(0,\pi/2)$

$\Rightarrow f\downarrow$