

Algebralliset rakenteet II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kurssikoe

6.5.2015

Koeaika on kolme tuntia.

1. (12 pistettä)

- (a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomin $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?
(b) Mitä seuraavista renkaan $\mathbb{Z}_4[X]$ polynomeista vastaa sama polynomikuvaus?

$$P = 2X^2 - 1, \quad Q = 4X^3 + 2X^2 + 3, \quad R = X^2 + 1$$

2. (6 pistettä) Joukko $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on rengas jäännösluokkien tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen.

- (a) Mikä on renkan ykkösalkio?
(b) Mitä renkaan R alkioita vastaa kokonaisluku 4? Entä -2 ?

3. (12 pistettä) Ryhmällä S_4 on normaali aliryhmä $A = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia tekijäryhmässä S_4/A ? Perustele väitteesi huolellisesti käyttäen tekijäryhmän kertolaskun määritelmää.

- (a) $(13)A \cdot (12)A = (134)A$
(b) $((132)A)^{-1} = (13)A$
(c) Joukko $\{A, (123)A, (124)A\}$ on ryhmän S_4/A aliryhmä.

4. (6 pistettä) Olkoon $G = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N . Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.

5. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f(a) = (-1)^a$.

- (a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
(b) Määritä f :n ydin. Perustele vastauksesi huolellisesti.
(c) Määritä isomorfismi \bar{f} , joka kuvauksesta f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla.
(d) Kuvaus f ei ole injektio. Kuvaile lyhyesti omin sanoin, miksi kuvaus \bar{f} on injektio. Voit halutessasi piirtää avuksi kuvan. Tarkkaa todistusta ei tarvita.

Algebralliset rakenteet II

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kurssikoe

6.5.2015

Koeaika on kolme tuntia.

1. (12 pistettä)

- (a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomin $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?
- (b) Mitä seuraavista renkaan $\mathbb{Z}_4[X]$ polynomeista vastaa sama polynomikuvaus?

$$P = 2X^2 - 1, \quad Q = 4X^3 + 2X^2 + 3, \quad R = X^2 + 1$$

2. (6 pistettä) Joukko $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on rengas jäännösluokkien tavallisen yhteen- ja kertolaskun suhteen.

- (a) Mikä on renkan ykkösalkio?
- (b) Mitä renkaan R alkioita vastaa kokonaisluku 4? Entä -2 ?

3. (12 pistettä) Ryhmällä S_4 on normaali aliryhmä $A = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia tekijäryhmässä S_4/A ? Perustele väitteesi huolellisesti käyttäen tekijäryhmän kertolaskun määritelmää.

- (a) $(13)A \cdot (12)A = (134)A$
- (b) $((132)A)^{-1} = (13)A$
- (c) Joukko $\{A, (123)A, (124)A\}$ on ryhmän S_4/A aliryhmä.

4. (6 pistettä) Olkoon $G = \langle g \rangle$ syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N . Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.

5. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f(a) = (-1)^a$.

- (a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
- (b) Määritä f :n ydin. Perustele vastauksesi huolellisesti.
- (c) Määritä isomorfismi \bar{f} , joka kuvauksesta f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla.
- (d) Kuvaus f ei ole injektio. Kuvaile lyhyesti omin sanoin, miksi kuvaus \bar{f} on injektio. Voit halutessasi piirtää avuksi kuvan. Tarkkaa todistusta ei tarvita.