

Matematiikan ja tilastotieteen osasto  
Algebralliset rakenteet I  
Kurssikoe 6.3.2019 (kesto 2 h 30 min)

Taulukkokirjan, laskimen ja muiden apuvälineiden käyttö ei ole sallittua.  
Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

1. Määritellään joukossa  $\mathbb{Q}$  laskutoimitus  $*$  seuraavasti:

$$a * b = -4ab \text{ kaikilla } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Yhtälön oikean puolen kertolasku on tavallinen rationaalilukujen kertolasku.  
Onko laskutoimitus  $*$  liitännäinen? Entä vaihdannainen? Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Mikä on alkion  $1/2$  käänteisalkio?

2. Tarkastellaan symmetristä ryhmää  $S_7$ .

a) Kirjoita permutaatio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

erillisten syklien tulona.

b) Määritä  $(162) \cdot (12)(34)$ .

c) Määritä  $((62)(17))^{-3}$ .

d) Ratkaise yhtälö  $(315) \cdot x \cdot (14) = (12)$ .

3. Tarkastellaan neliön symmetriaryhmää  $D_4$ , jonka laskutoimitustaulukko on tämän paperin kääntöpuolella.

a) Ryhmällä  $D_4$  on aliryhmä  $H = \{E, P_1\}$ . Määritä aliryhmän  $H$  vasempien sivuluokkien joukko  $D_4/H$ .

b) Palautetaan mieleen, että ryhmän  $G$  *keskus* on sen aliryhmä

$$Z = \{g \in G \mid xg = gx \text{ kaikilla } x \in G\}.$$

Määritä ryhmän  $D_4$  *keskus*.

4. Oletetaan, että  $G$  ja  $H$  ovat ryhmiä ja  $f: G \rightarrow H$  isomorfismi. Merkitään ryhmien  $G$  ja  $H$  neutraalialkioita symboleilla  $e_G$  ja  $e_H$ .

a) Osoita, että  $f(e_G) = e_H$ .

b) Oletetaan, että ryhmässä  $G$  pätee  $g^2 = e_G$  kaikilla  $g \in G$ . Osoita, että ryhmässä  $H$  pätee  $h^2 = e_H$  kaikilla  $h \in H$ .

	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$E$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$K_{90^\circ}$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$K_{180^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$
$K_{270^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$
$P_1$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$
$P_2$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$
$P_3$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$
$P_4$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$