

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Algebralliset rakenteet I
Kurssikoe 7.3.2018 (kesto 2 h 30 min)

1. a) Mitkä seuraavista jäännösluokkia koskevista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \quad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \quad -[4]_5 = [6]_5$$

Perustele vastauksesi.

b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

2. a) Kirjoita permutaatio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

erillisten syklien tulona.

b) Mikä on alkion $(1\ 3)(2\ 5\ 4)$ kertaluku ryhmässä S_5 ?

c) Laske

$$((1\ 3)(2\ 5\ 4))^{2018}.$$

3. a) Oletetaan, että G on vaihdannainen ryhmä, ja ryhmä H on isomorfinen ryhmän G kanssa. Osoita, että myös ryhmä H on vaihdannainen.

b) Ovatko ryhmät \mathbb{Z}_6 ja S_3 isomorfiset?

c) Ovatko ryhmät \mathbb{Z}_6 ja $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ isomorfiset?

d) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ja S_3 isomorfiset?

4. Tarkastellaan neliön symmetriaryhmää D_4 , jonka laskutoimitustaulukko on tämän paperin kääntöpuolella.

a) Onko ryhmä D_4 syklinen?

b) Mitkä ovat Lagrangen lauseen nojalla mahdollisia ryhmän D_4 aliryhmän kertalukuja?

c) Anna esimerkkejä ryhmän D_4 aliryhmistä (ainakin yksi esimerkki kutakin b)-kohdassa löytämäsi mahdollista kertalukua kohti).

	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
E	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
K_{90°	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E	P_4	P_1	P_2	P_3
K_{180°	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°	P_3	P_4	P_1	P_2
K_{270°	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°	P_2	P_3	P_4	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°
P_2	P_2	P_3	P_4	P_1	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°
P_4	P_4	P_1	P_2	P_3	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E

$$P_n \cdot K_{90^\circ} = P_1$$

$$K_{90^\circ} \cdot P_n = P_n$$

$$3 \cdot \frac{1}{3} = E$$

$n=4$

$$\{E, K_{90^\circ}, K_{180^\circ}, K_{270^\circ}\}$$

$n=2$

$$\{E, P_i\}$$